Math. Institut der Univ. München, K. Ziegler, T. Kuessner 13. Januar 2003

Übungen zu MP III (Analysis III für Physiker)

Blatt 10

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1.
Sei $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$.
a) Zeigen Sie: f ist auf $B(z_0, r)$ beliebig oft differenzierbar.
b) $f'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j (z - z_0)^{j-1}$ für $z \in B(z_0, r)$.
c) $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.
Satz von Liouville. Beweisen Sie: jede auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe, beschränkte Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant.

Aufgabe 3.
a) **Jordan-Lemma.** Seien P, Q Polynome mit $\deg(P) < \deg(Q)$. Sei $f(z) := \frac{P(z)}{Q(z)}$. Für $r > 0$ sei $K_r := \{re^{i\phi} \in \mathbb{C} : 0 \leq \phi \leq \pi\}$. Beweisen Sie: $\lim_{r\to\infty} \int_{K_r} f(z) e^{iz} dz = 0$.
b) Wir nehmen zusätzlich an, dass Q keine reellen Nullstellen hat. Folgern Sie, dass

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{r} Res\left(f(z) e^{iz}, z_i\right)$$

gilt, wobei $z_1, \ldots, z_r$ genau diejenigen Nullstellen von Q sind, die positiven Imaginärteil haben.

Hausaufgaben

Aufgabe 1.
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Weg, $\Gamma := \gamma([a, b])$. Seien $f_n : \Gamma \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen, die gleichmässig gegen $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ konvergieren. Beweisen Sie:

$$\int_\gamma f_n(z) dz \longrightarrow \int_\gamma f(z) dz.$$

Aufgabe 2.
Fundamentalsatz der Algebra. Seien $n \in \mathbb{N} - \{0\}, a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ das durch

$$P(z) := z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

definierte Polynom. Beweisen Sie: es gibt ein $z \in \mathbb{C}$ mit $P(z) = 0$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\frac{1}{P(z)}$ beschränkt sein würde wenn $P(z)$ keine Nullstellen hätte.

Aufgabe 3.
Berechnen Sie:
a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+2x^2+x^4} dx$,
b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx$,
c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
Hinweis: Für b) und c) können Sie Anwesenheitsaufgabe 3 benutzen. Beachten Sie, dass in c) die Voraussetzungen von Anwesenheitsaufgabe 3b) nicht erfüllt sind!

Die Aufgaben und (nach Abgabeschluss) auch die Lösungen sind im Internet abrufbar unter
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~kuessner/mp3.html .

Abgabe: Montag, 20. Januar, 11.15 Uhr.