Math. Institut der Univ. München, K. Ziegler, T. Kuessner 21. September 2002

Übungen zu MP III (Analysis III für Physiker)

Blatt 1

Anwesenheitsaufgaben (werden in der Übung besprochen)

Aufgabe 1.

Sei $f_n(x) := \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
a) für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$,
b) $\{f_n\}$ konvergiert nicht gleichmässig auf $\mathbb{R}$,
c) für jedes $\alpha > 1$ konvergiert $\{f_n\}$ gleichmässig auf $\{x :\mid x \mid \geq \alpha\}$ und auf $\{x :\mid x \mid \leq \frac{1}{\alpha}\}$.

Aufgabe 2.

Sei I ein abgeschlossenes Intervall mit $a \in I$ und sei $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Es gebe $C \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $\mid f^{(n)}(x) \mid \leq C^n$ für alle $x \in I$ und $n \geq N$. Beweisen Sie:
$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Aufgabe 3.

Beweisen Sie $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ für alle $x \in (-1,1)$.

Hausaufgaben (sind abzugeben)

Aufgabe 1.

Sei
$$f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$$
für $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass $\{f_n\}$ nicht auf $[0,1]$, aber auf jedem Teilintervall $[q,1]$, $0 < q < 1$, gleichmässig konvergiert.

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie die Taylorreihe von $\ln(1+x)$ im Entwicklungspunkt 0 und zeigen Sie direkt (ohne Benutzung von Beispiel 4b bzw. Satz 4), dass für $0 \leq x \leq 1$ das Restglied R_{n+1} gegen Null konvergiert: $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$.

Aufgabe 3.

Beweisen Sie
$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5.\ldots.2n-1}{2.4.6.\ldots.2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
für alle $x \in [-1,1]$.
Hinweis: Für $x = \pm 1$ benötigen Sie den abelschen Grenzwertsatz.

Die Aufgaben und (nach Abgabeschluss) auch die Lösungen sind im Internet abrufbar unter
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/ kuessner/mp3.html .

Abgabe: Montag, 28. September, 11.15 Uhr.