Math. Institut der Univ. Siegen, Prof. Dr. U. Koschorke, Dr. T. Kuessner 9. Januar 2006

Übungen zur Liegruppen-Vorlesung

Blatt 9

Die n-dimensionale Sphäre ist

$$\mathbb{S}^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1 \right\}$$

mit der Riemannschen Metrik

$$g\left((v_1, \ldots, v_{n+1}), (w_1, \ldots, w_{n+1}) \right) = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n + v_{n+1} w_{n+1}$$

für $(v_1, \ldots, v_{n+1}), (w_1, \ldots, w_{n+1}) \in T_x\mathbb{S}^n \subset T_x\mathbb{R}^{n+1}$.
Der n-dimensionale hyperbolische Raum ist

$$\mathbb{H}^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1, x_{n+1} > 0 \right\}$$

mit der Riemannschen Metrik

$$h\left((v_1, \ldots, v_{n+1}), (w_1, \ldots, w_{n+1}) \right) = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n - v_{n+1} w_{n+1}$$

für $(v_1, \ldots, v_{n+1}), (w_1, \ldots, w_{n+1}) \in T_x\mathbb{H}^n \subset T_x\mathbb{R}^{n+1}$.

<u>Aufgabe 1.</u>

Zeigen Sie, dass g und h tatsächlich Riemannsche Metriken sind.
Hinweis: $T_x\mathbb{H}^n = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n - x_{n+1} v_{n+1} = 0 \right\}$.

<u>Aufgabe 2.</u>

Wir betrachten $\mathbb{S}^2$ mit den lokalen Koordinaten $(\phi_1, \phi_2) \to (\sin\phi_1 \sin\phi_2, \sin\phi_1 \cos\phi_2, \cos\phi_1)$ und $\mathbb{H}^2$ mit den lokalen Koordinaten $(\psi_1, \psi_2) \to (\sinh\psi_1 \sin\psi_2, \sinh\psi_1 \cos\psi_2, \cosh\psi_1)$.
Bestimmen Sie jeweils die Christoffel-Symbole.
Hinweis: Zeigen Sie, dass bzgl. dieser Koordinaten $g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = \sin^2\phi_1$ bzw. $h_{11} = 1, h_{12} = 0, h_{22} = \sinh^2\psi_1$ gilt.

<u>Aufgabe 3.</u>

a) Bestimmen Sie die Geodäte $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2$ mit $\gamma(0) = (0,0,1), \gamma'(0) = (1,0,0)$.
b) Bestimmen Sie die Geodäte $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$ mit $\gamma(0) = (0,0,1), \gamma'(0) = (1,0,0)$.

<u>Aufgabe 4.</u>

Bestimmen Sie Schnittkrümmungen, Ricci-Krümmungen und Skalarkrümmungen von $\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{H}^2$.

Abgabe: Montag, 23. Januar, 10.15 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/lg.html