Übungen zur Liegruppen-Vorlesung

Blatt 8

Aufgabe 1.

Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: zu jedem Homomorphismus $\theta : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{S}^1$ gibt es eine Darstellung $\rho : \mathbb{T}^n \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$, deren einziges Gewicht θ ist.

Aufgabe 2.

Sei G eine Matrix-Gruppe, ρ eine Darstellung von G und π die assoziierte Lie-Algebren-Darstellung von $\mathfrak{g}$. Zeigen Sie:

$$\pi\left(gAg^{-1}\right) = \rho(g)\,\pi(A)\,\rho\left(g^{-1}\right)$$

für $g \in G, A \in \mathfrak{g}$.

Aufgabe 3.

Sei B die Killingform der Lie-Algebra $\mathfrak{g} = su(2)$. Zeigen Sie:

$$B(X,Y) = 4Tr(XY)$$

für alle $X, Y \in su(2)$. Folgern Sie, dass B negativ definit ist.

Aufgabe 4.

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\rho_m : SU(2) \rightarrow GL(m+1, \mathbb{C})$ die in der Vorlesung definierte m+1-dimensionale irreduzible Darstellung von $SU(2)$. Es gilt:

$$Tr\left(\rho_m\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}\right) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$$

mit $2\cos\theta = z + \overline{z}$.
Folgern Sie (ohne Benutzung des Clebsch-Gordan-Theorems):

$$Tr(\rho_m(A))\,Tr(\rho_n(A)) = Tr(\rho_{m+n}(A)) + Tr(\rho_{m+n-2}(A)) + \ldots + Tr(\rho_{m-n}(A))$$

für alle $A \in SU(2)$. (Hinweis: es gibt eine bekannte Formel für $\sum_{l=0}^{k} \sin(\alpha + l\beta)$.)

Abgabe: Mittwoch, 11. Januar, 10.15 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/lg.html