Übungen zur Liegruppen-Vorlesung

Blatt 6

Aufgabe 1.

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), X \in Vect(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie: $X(f) = < grad\ f, X >$.

Aufgabe 2.

Sei X ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M, und sei $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ eine differenzierbare Abbildung, so dass mit der Bezeichnung $\Phi_t(x) := \Phi(t, x)$ gilt:

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\ \Phi_t(x) = X(\Phi_{t_0}(x)) \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}, x \in M$$

$$\Phi_0(x) = x \quad \forall x \in M.$$

Zeigen Sie, dass für alle $t, s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \Phi_s.$$

Hinweis: Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen.

Aufgabe 3.

Sei G eine Lie-Gruppe, H eine Untermannigfaltigkeit, die abgeschlossen unter den Gruppenoperationen ist. Sei $\Theta : \mathbb{R} \to G$ eine 1-Parametergruppe in G. Zeigen Sie: wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $\Theta(t) \in H$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, dann gilt $\Theta(t) \in H$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4.

Zeigen Sie, dass es auf der $\mathbb{S}^3$ drei Vektorfelder gibt, die in jedem Punkt linear unabhängig sind.

Abgabe: Montag, 12. Dezember, 10.15 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/∼kuessner/lg.html