Übungen zur Liegruppen-Vorlesung

Blatt 4

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass die Lorentz-Gruppe

$$O(3,1) = \left\{ A \in GL(4,\mathbb{R}) : A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

nicht kompakt ist.

Aufgabe 2.

a) Berechnen Sie das Exponential von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Sei $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie das Exponential von $\begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}$.

c) Sei $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie das Exponential von $\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.

Sei $\mathfrak{so}(2) = \{A \in Mat(2,\mathbb{R}) : A + A^T = 0, Tr(A) = 0\}$. Zeigen Sie, dass die Exponentialabbildung

$$exp : \mathfrak{so}(2) \to SO(2)$$

surjektiv ist.

Aufgabe 4.

Sei $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{A \in Mat(2,\mathbb{R}) : Tr(A) = 0\}$. Bestimmen Sie das Bild der Exponentialabbildung

$$exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to SL(2,\mathbb{R}).$$

Abgabe: Mittwoch, 23. November, 10.15 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/∼kuessner/lg.html