Übungen zur Liegruppen-Vorlesung

Blatt 3

Aufgabe 1.

Zeigen Sie: eine Mannigfaltigkeit ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.
Hinweis: offene und abgeschlossene Kugeln im $\mathbb{R}^n$ sind zusammenhängend und wegzusammenhängend.

Aufgabe 2.

$\mathbb{S}^1$ mit dem Atlas von Blatt 1, Aufgabe 4, ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. $\mathbb{S}^1$ als Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1 ist eine Gruppe. Zeigen Sie, dass Gruppenmultiplikation und Inversion differenzierbare Abbildungen sind.

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie: $A \in SO(2) \Longleftrightarrow$ es gibt $\phi \in \mathbb{R}$ mit $A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$,
$A \in SU(2) \Longleftrightarrow$ es gibt $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z|^2 + |w|^2 = 1$, so dass $A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$.
b) Zeigen Sie, dass $SO(2)$ diffeomorph zu $\mathbb{S}^1$ und $SU(2)$ diffeomorph zu $\mathbb{S}^3$ ist.

Aufgabe 4.

Zeigen Sie: zu jedem $A \in GL(n, \mathbb{C})$ gibt es eine Folge A_k von diagonalisierbaren Matrizen mit $\lim_{k\to\infty} A_k = A$.
(Die Gruppe der diagonalisierbaren Matrizen ist also keine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$.)

Abgabe: Mittwoch, 16. November, 10.15 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/lg.html