Übungen zur Liegruppen-Vorlesung

Blatt 2

Aufgabe 1.

Zeigen Sie: Eine Matrix $A \in Mat(n, \mathbb{R})$ (bzw. $A \in Mat(n, \mathbb{C})$) gehört zu $O(n)$ (bzw. zu $U(n)$) genau dann, wenn für die Spaltenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ von A gilt: $< v_i, v_j >= \delta_{ij}$.
(Erinnerung: $O(n) = \left\{A \in Mat(n, \mathbb{R}) : AA^T = \mathbb{I}\right\}, U(n) = \left\{A \in Mat(n, \mathbb{C}) : A\overline{A}^T = \mathbb{I}\right\}$.)

Aufgabe 2.

Zeigen Sie, dass die folgenden Atlanten auf $\mathbb{S}^1$ kompatibel sind:
- der Atlas für $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (Vorlesung, Beispiel 2),
- der durch stereographische Projektion gegebene Atlas (Blatt 1, Aufgabe 4),
- der Atlas als Nullstellenmenge von $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ (Vorlesung, Satz 1).

Aufgabe 3.

Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung, die in allen Punkten $a \in f^{-1}(0)$ eine Submersion ist. Nach Vorlesung ist $M := f^{-1}(0)$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

$$TM = \left\{(x, v) \in \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^{n+m} : f(x) = 0, Df_x(v) = 0\right\}.$$

Aufgabe 4.

Zeigen Sie: $T\mathbb{S}^n = \left\{(x, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} : \| x \| = 1, < x, v >= 0\right\}$.

Abgabe: Mittwoch, 9. November, 10.15 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/lg.html