Übungen zur Liegruppen-Vorlesung

Blatt 10

Aufgabe 1. (**Homogene Räume**)

Eine Wirkung einer Gruppe G auf einer Menge X ist eine Abbildung $\mu : G \times X \to X$ mit $\mu(e,x) = x$ und $\mu(g, \mu(h,x)) = \mu(gh, x)$ für alle $x \in X, g, h \in G$. Man schreibt abkürzend gx für $\mu(g,x)$. Eine Wirkung ist transitiv, wenn es für alle $x, y \in X$ ein $g \in G$ mit $gx = y$ gibt.
a) Zeigen Sie: für jede Untergruppe $H \subset G$ wird durch $g_1[g_2] = [g_1 g_2]$ eine transitive Wirkung von G auf G/H definiert.
b) Sei X eine Menge, $x_0 \in X$. Zeigen Sie: eine Wirkung einer Gruppe G auf X ist transitiv genau dann, wenn für alle $y \in X$ ein $g \in G$ mit $gx_0 = y$ existiert.
c) Sei $\mu : G \times X \to X$ eine transitive Wirkung von G auf X, sei $x_0 \in X$ und $H := \{g \in G : gx_0 = x_0\}$. Zeigen Sie: es gibt eine Bijektion zwischen X und G/H.
(Falls G eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe ist, heißt G/H homogener Raum.)

Aufgabe 2. (**Hyperbolische Ebene**)

Zeigen Sie: es gibt eine Bijektion zwischen $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ und dem homogenen Raum $SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass durch $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$ eine Wirkung von $SL(2,\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}^2$ definiert wird.

Aufgabe 3. (**Graßmann-Mannigfaltigkeit.**)

Zeigen Sie: es gibt eine Bijektion zwischen der Menge der k-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ und dem homogenen Raum $O(n)/(O(k) \times O(n-k))$.
Hinweis: Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein k-dimensionaler Untervektorraum, $A \in O(n)$, dann ist auch $AV = \{w : w = Av, v \in V\}$ ein k-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 4.

Zeigen Sie: es gibt eine Bijektion zwischen der Menge aller symmetrischen, positiv definiten, Bilinearformen auf dem $\mathbb{R}^n$ und dem homogenen Raum $GL(n,\mathbb{R})/O(n)$.
Hinweis: Sei B eine symmetrische, positiv definite, Bilinearform, und $A \in GL(n,\mathbb{R})$. Sei $A^*B(x,y) := B\left(A^{-1}x, A^{-1}y\right)$. Zeigen Sie, dass A^*B eine symmetrische, positiv definite, Bilinearform ist.

Abgabe: Montag, 30. Januar, 10.15 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/lg.html