Übungen zur Liegruppen-Vorlesung

Blatt 1

Aufgabe 1.

Sei $Mat(n, \mathbb{R})$ die Menge der reellen $n \times n$-Matrizen und $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in Mat(n, \mathbb{R}) : det(A) \neq 0\}$. Geben Sie eine differenzierbare Struktur (d.h. einen Atlas) an, mit dem $GL(n, \mathbb{R})$ eine n^2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2.

Kann es auf der Menge $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 = y^2\right\}$ (mit der üblichen Topologie als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$) eine differenzierbare Struktur geben? (Anschauliche Begründung genügt.)

Aufgabe 3.

Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Atlanten $\{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ für M bzw. $\{(V_j, \psi_j) : j \in J\}$ für N.
Sei $M \times N = \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$. Zeigen Sie, dass $\{(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j) : i \in I, j \in J\}$ eine differenzierbare Struktur auf $M \times N$ definiert.
(Für $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ und $\psi_j : V_j \to \mathbb{R}^n$ ist $\phi_i \times \psi_j : U_i \times V_j \to \mathbb{R}^{m+n}$ definiert durch $\phi_i \times \psi_j(x, y) = (\phi_i(x), \psi_j(y))$.

Aufgabe 4.

Sei $\mathbb{S}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \| x \| = 1\right\}$. Zeigen Sie, dass $\{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$ mit

$$U_1 = \{x \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} \neq -1\}, U_2 = \{x \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} \neq 1\},$$

$$\phi_1(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}}\right), \phi_2(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right)$$

eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Abgabe: Mittwoch, 2. November, 10.15 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/lg.html