Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Linus Kramer
19.Juli 2003

Semestralklausur Analysis II

für M, HLM und Gäste
WiSe 2004/2005

Note:

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend nummeriert, am Schluß der Klausur in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen.
Die Klausureinsicht findet am 10.2. von 10 Uhr bis 12 Uhr in S2-15/401 statt.

BITTE IN BLOCKSCHRIFT AUSFÜLLEN
Name: ....
Vorname: ....
Matr.-Nr.: ....
Fachrichtung: ....
Übungsgruppenleiter: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Bonus	Summe
Mögl. Punktzahl	10	10	10	10	10	10	10	10	10	80+10
Err. Punktzahl										

Wichtige Hinweise:

- Bearbeitungszeit: **120 Minuten**,
  Gesamtpunktzahl: **80 Punkte + 10 mögliche Bonuspunkte**.
  Mit 35 Punkten ist die Klausur bestanden.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Alles Schriftliche.
- Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.
- Alle Blätter dürfen nur **einseitig** beschrieben werden.
- **Tip:** Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick, bevor Sie beginnen.
- **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Ist $n \geq 2$ und $0 < x_k < 1$ für $1 \leq k \leq n$, dann gilt

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - x_k) > 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(a) $a_n = \frac{2n^2+100n}{(2n+1)^2-n}$

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(a) Konvergieren die Folgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergieren auch die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Divergiert die Summe $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zweier Folgen, so divergieren auch die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{(\sqrt[k]{e}\sqrt{10})^k+5}$ auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert an.

(b) Stellen Sie die Potenzreihe der Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ auf und berechnen Sie deren Konvergenzradius.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Machen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = e^{-x^2} \sin x$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Sei $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f in $[-1, 1]$ einen Fixpunkt hat, dass also ein $x \in [-1, 1]$ existiert, für das $f(x) = x$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(x) - x$.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\cos(5x)dx.$$

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Die Gleichung einer achsenparallelen Ellipse, deren Zentrum im Ursprung liegt, ist gegeben durch

$$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1.$$

Berechnen Sie die Fläche der Ellipse, indem Sie zunächst eine Funktion bestimmen.