Aufgabe 1.1: R F F R

Aufgabe 1.2: F R R R

Aufgabe 1.3: R R F F

Aufgabe 1.4: F F R R

Aufgabe 2.1

a) Definiere stetige Abbildungen $f_1, f_2, f_3 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ durch

$$f_1(x, y) = xy,$$

$$f_2(x, y) = \mid x \mid,$$

$$f_3(x, y) = \mid y \mid .$$

Weil $\{0\} \subset \mathbf{R}$ und $[0,1] \subset \mathbf{R}$ abgeschlossen sind, sind $f_1^{-1}(\{0\}), f_2^{-1}([0,1])$ und $f_3^{-1}([0,1])$ abgeschlossen. Also ist

$$Y = f_1^{-1}(\{0\}) \cap f_2^{-1}([0,1]) \cap f_3^{-1}([0,1])$$

abgeschlossen und

$$U = \mathbf{R}^2 - Y$$

offen.

b) Wir müssen zeigen: für je zwei Punkte

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in U$$

gilt

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2).$$

1.Schritt: Wenn die Verbindungsstrecke in U liegt, d.h. wenn

$$(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \in U$$

für alle $0 \leq t \leq 1$ gilt, dann gilt $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$.

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = \int_0^1 df(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2)(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\, dt = 0,$$

wobei wir benutzt haben, dass wegen $(tx_1 + (1-t)\, x_2, ty_1 + (1-t)\, y_2) \in U$ nach Voraussetzung

$$df\,(tx_1 + (1-t)\, x_2, ty_1 + (1-t)\, y_2) = 0$$

gilt.

Aus Schritt 1 folgt insbesondere

$$f\,(2,0) = f\,(0,2)\,,$$

denn für alle $t \in [0,1]$ ist $(2t, 2\,(1-t)) \in U$. Analog

$$f\,(2,0) = f\,(0,-2)$$

weil $(2t, -2\,(1-t)) \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Also auch

$$f\,(0,2) = f\,(0,-2)\,.$$

2.Schritt: Wir zeigen nun $f\,(x,y) = f\,(0,2)$ für $y \geq 0$ und $f\,(x,y) = f\,(0,-2)$ für $y \leq 0$. Wegen $f\,(0,2) = f\,(0,-2)$ folgt daraus dann $f\,(x_1,y_1) = f\,(x_2,y_2)$ für beliebige Punkte (deren Verbindungsstrecke nicht notwendig in U liegt).

Fall 1: $(x,y) \in U$ und $y \geq 0$.
Dann ist $(tx, 2\,(1-t)) \in U$ für $t \in [0,1]$. Also können wir Schritt 1 anwenden und erhalten

$$f\,(x,y) = f\,(0,2)\,.$$

Fall 2: $(x,y) \in U$ und $y \leq 0$. Dann ist $(tx, -2\,(1-t)) \in U$ für $t \in [0,1]$. Also knnen wir Schritt 1 anwenden und erhalten

$$f\,(x,y) = f\,(0,-2)\,.$$

Aufgabe 2.2

a)

$$D_v f\,(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\,(tv_1, tv_2) - f\,(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{8tv_1 t^4 v_2^4}{t^4 v_1^4 + t^4 v_2^4} = \frac{8 v_1 v_2^4}{v_1^4 + v_2^4}.$$

b) Stetigkeit in $(0,0)$: Sei $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$. Dann ist

$$0 \leq \mid f\,(x_n,y_n) \mid = \mid \frac{8x_n y_n^4}{x_n^4 + y_n^4} \mid \leq \mid 8x_n \mid\,.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} 8x_n = 0$ folgt daraus $\lim_{n\to\infty} f\,(x_n,y_n) = 0$.

f ist nicht differenzierbar in $(0,0)$ weil $D_v f$ nicht linear von v abhängt. Zum Beispiel ist $D_{(1,0)} f = 0$ und $D_{(0,1)} f = 0$, aber $D_{(1,1)} f = 4$.

Aufgabe 2.3

a) Wegen
$$df\,(u_1,u_2) = \left(4u_1^3 - 4\,(u_1-u_2)\,, 4u_2^3 - 4\,(u_2-u_1)\right)$$
kann es lokale Extrema nur in $(0,0)\,,\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ und $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ geben. Die Hesse-Matrix ist
$$\begin{pmatrix} 12u_1^2-4 & 4 \\ 4 & 12u_2^2-4 \end{pmatrix}.$$
In $(0,0)$ hat man die Hesse-Matrix
$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$
mit Spur -8 und Determinante 0, also eine negativ semidefinite Matrix. Mit der Hesse-Matrix bekommen wir keine Aussage. Für alle ϵ mit $0<\epsilon<\sqrt{2}$ ist aber
$$f\,(\epsilon,\epsilon) = 2\epsilon^4 > 0$$
und
$$f\,(\epsilon,0) = \epsilon^4 - 2\epsilon^2 = \epsilon^2\left(\epsilon^2-2\right) < 0,$$
also ist $f\,(0,0)=0$ weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum.

In $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ hat man die Hesse-Matrix
$$\begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$
mit Spur 20 und Determinante $384>0$, also eine positiv definite Matrix. $f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=-8$ ist also ein lokales Minimum.

In $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ hat man die Hesse-Matrix
$$\begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$
mit Spur 20 und Determinante 384, also eine positiv definite Matrix. $f\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=-8$ ist also ein lokales Minimum.

b) Wegen
$$dg\,(u_1,u_2) = \left(\frac{-u_1^2+u_2^2+1}{\left(u_1^2+u_2^2+1\right)^2}, \frac{-2u_1u_2}{\left(u_1^2+u_2^2+1\right)^2}\right)$$
kann es lokale Extrema nur in $(1,0)$ und $(-1,0)$ geben.

Die Hesse-Matrix ist

$$\begin{pmatrix} \frac{2u_1\left(u_1^2-3u_2^2-3\right)}{\left(u_1^2+u_2^2+1\right)^3} & \frac{2u_2\left(3u_1^2-u_2^2-1\right)}{\left(u_1^2+u_2^2+1\right)^3} \\ \frac{2u_2\left(3u_1^2-u_2^2-1\right)}{\left(u_1^2+u_2^2+1\right)^3} & \frac{-2u_1\left(u_1^2+5u_2^2+1\right)}{\left(u_1^2+u_2^2+1\right)^3} \end{pmatrix}$$

.

Die Hesse-Matrix in $(1,0)$ ist $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Die Hesse-Matrix in $(-1,0)$ ist $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

In $(1,0)$ ist die Hesse-Matrix negativ definit, $g(1,0)=\frac{1}{2}$ ist also ein lokales Maximum.

In $(-1,0)$ ist die Hesse-Matrix positiv definit, $g(-1,0)=-\frac{1}{2}$ ist also ein lokales Minimum.

Aufgabe 2.4

Wir beweisen zunächst durch vollständige Induktion nach $m \in \mathbf{N}$:

Für alle $n, m \in \mathbf{N}$ ist $K_{n+m} \subset K_n$.

Induktionsanfang für $m=1$: nach Voraussetzung ist $K_{n+1} \subset K_n$.
Induktionsschritt: sei $K_{n+m} \subset K_n$, dann ist $K_{n+m+1} \subset K_{n+m} \subset K_n$.

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ gibt es wegen $K_n \neq \emptyset$ ein $x_n \in K_n$. Wie oben bewiesen, folgt dann $x_n \in K_l$ für alle $l \leq n$.

Insbesondere ist $x_n \in K_1$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Weil K_1 kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $x_{n_k} \in K_1$ mit $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$ und

$$x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in K_1.$$

Sei jetzt $l \in \mathbf{N}$ beliebig. Dann ist $x_{n_k} \in K_l$ für fast alle $k \in \mathbf{N}$, nämlich für alle k mit $n_k \geq l$.

Weil K_l kompakt ist, muss x_{n_k} eine Teilfolge haben, die in K_l konvergiert. Wegen $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ muss der Grenzwert dieser Teilfolge gleich x sein, also ist $x \in K_l$. Weil dies für jedes $l \in \mathbf{N}$ gilt, ist

$$x \in \cap_{n\in\mathbf{N}} K_n,$$

insbesondere ist $\cap_{n\in\mathbf{N}} K_n \neq \emptyset$.