Mathematisches Institut
Universität Eichstätt
Dr. Thilo Kuessner

7. Januar 2021

Integrationstheorie, WS 2020/21, Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1:

Auf $X = (0, \infty)$ betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$. Zeigen Sie (ohne Verwendung der Stammfunktion und des Riemann-Integrals), dass das Lebesgue-Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} dx = \infty$$

ist.

Aufgabe 2:

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ eine messbare Menge und $f\colon A \to [0, \infty)$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Beweisen Sie, dass für das Lebesgue-Integral die Ungleichung

$$\mu(\{x \in A\colon f(x) > c\}) \leq \frac{1}{c} \int_A f d\mu$$

gilt.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass jede stetige Treppenfunktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstant ist.

Aufgabe 4:

Betrachte die Funktionen

$$f_1(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x = 0 \\ |x| & 0 < |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{array} \right\}, f_2(x) = \left\{ \begin{array}{cc} (x+1)^2 & |x| \neq 1 \\ 20 & |x| = 1 \end{array} \right\}, f_3(x) \equiv 1$$

a) Beweisen Sie, dass die Funktionen $f_k, k = 1, 2, 3$ meßbar sind.
b) Berechnen Sie ihr Lebesgue-Integral $\int_{\mathbb{R}} f_k d\mu$ bzgl. des Lebesgue-Maßes μ.
c) Berechnen Sie ihr Lebesgue-Integral $\int_{\mathbb{R}} f_k dm$ bzgl. des Maßes

$$m(A) = \sum_{n \in A \cap \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+1)^2}$$

Hinweis: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty, \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Für b) dürfen Sie den (in der Vorlesung noch zu beweisenden) Satz verwenden, dass für Riemann-integrierbare Funktionen das Lebesgue-Integral mit dem Riemann-Integral übereinstimmt.

Abgabe 15. Januar 2021, 23:15 Uhr.