Mathematisches Institut
Universität Eichstätt
Dr. Thilo Kuessner

28. Januar 2021

Integrationstheorie, WS 2020/21, Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1:

Gegeben ist $D = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$. Berechnen Sie

$$\int_D (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)e^{-(x_1^2+x_2^2)}dx_1dx_2$$

durch Transformation auf Polarkoordinaten.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Kugelschale D um den Nullpunkt mit äußerem Radius R und innerem Radius r ($r < R$). Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz.$$

Aufgabe 3:

Aus dem Zylinder

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 < 4\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

wird durch die $x_1 - x_2$-Ebene und die Fläche

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_3 = e^{x_1^2+x_2^2}\right\}$$

ein Körper herausgeschnitten. Berechnen Sie sein Volumen.

Aufgabe 4:

Die Menge all derjenigen $x \in \mathbb{R}^2$, die Lösungen einer Gleichung der Form

$$ax_1^2 + bx_2^2 = r^2$$

bei gegebenen positiven Zahlen a, b, r sind, nennt man eine Ellipse.
a) Geben Sie eine Transformation $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, die eine gegebene Ellipse auf einen Kreis abbildet.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der von einer Ellipse umschlossenen Fläche.

Hinweise: Nach Transformation in Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten oder Kugelkoordinaten kann man die folgenden Formeln verwenden.

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} f(r,\phi)rdrd\phi$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)dxdydz = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r,\phi,z)rdrd\phi dz$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r,\phi,\theta)r^2 \sin\theta drd\phi d\theta$$

Bei Aufgabe 4 muss man auch die allgemeine Transformationsformel verwenden.

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f(\phi(x)))|det(D\phi(x))|d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mu(x).$$

Abgabe 5. Februar 2021, 23:15 Uhr.