

Geometrie, SS 2023, Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1:

- a) Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix?
- b) Für welche $b, c \in \mathbb{R}$ ist $b \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ c & 6 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix?
- c) Sei A eine symmetrische 2×2 -Matrix, für deren beide Eigenwerte $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ gelte. Zeigen Sie, dass A orthogonal ist.

Hinweis: Aus LinAI ist bekannt, dass symmetrische Matrizen orthonormale Eigenvektoren haben und sich deshalb in der Form BDB^T mit einer orthogonalen Matrix B und der Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ diagonalisieren lassen.

Aufgabe 2:

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden $y = x + 3$, und sei $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Drehung um $(-2, 1)$ mit Drehwinkel $\frac{3\pi}{2}$.

- a) Beschreiben Sie die Verknüpfung $g \circ f$ als affine Abbildung $Ax + b$ mit einer orthogonalen Matrix A .
- b) Bestimmen Sie den Typ von $g \circ f$ (Verschiebung, Drehung, Spiegelung, Gleit-
spiegelung).

Aufgabe 3:

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden $y = -2x + 3$, und sei $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Verschiebung um $(2, -1)$.

- a) Beschreiben Sie die Verknüpfung $g \circ f$ als affine Abbildung $Ax + b$ mit einer orthogonalen Matrix A .
- b) Bestimmen Sie den Typ von $g \circ f$ (Verschiebung, Drehung, Spiegelung, Gleit-
spiegelung).

Abgabe 30. Mai 2023, 14:00 Uhr.