Geometrie, SS 2025, Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1:

Finden Sie alle affinen Abbildungen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(0, 0) = (1, 1), f(2, 0) = (1, 3), f(1, 1) = (2, 2).$$

Aufgabe 2:

Sei

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

die eine Drehung um den Nullpunkt mit Drehwinkel α beschreibende Matrix.
Sei E_2 die Einheitsmatrix.

a) Zeigen Sie, dass für $\alpha \in (0, 2\pi)$ die Matrix $E_2 - R_\alpha$ invertierbar ist.

Hinweis: Berechnen Sie die Determinante!

b) Sei $\alpha \in (0, 2\pi)$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, v \mapsto R_\alpha \cdot v + b$$

einen eindeutigen Fixpunkt p hat, d.h. eine eindeutige Lösung von $f(p) = p$.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass

$$f(x, y) = (y + 1, x + 1)$$

eine Gleitspiegelung ist. Bestimmen Sie dafür die Achse s , an der zunächst gespiegelt wird, und den zu s parallelen Vektor v , um den anschließend verschoben wird.

Abgabe 23. Mai 2025, 23:00 Uhr.