Blatt 2 - Lösungen

Aufgabe 1.

Seien $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ und $\psi_j : V_j \to \mathbb{R}^n$ Karten für M bzw. N. Dann hatten wir Karten $\Phi_i : \pi_i \left(U_i \times \mathbb{R}^m \times \{i\}\right) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ für TM gegeben durch $\Phi_i \left([x,u,i]\right) = \left(\phi_i (x), u\right)$. Entsprechend Karten für TN mit $\Psi_j \left([y,v,j]\right) = \left(\psi_j (y), v\right)$ von $\pi_j \left(V_j \times \mathbb{R}^n \times \{j\}\right)$ nach $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Zu $f : M \to N$ war dann das Differential $Df : TM \to TN$ definiert durch $Df\left([x,u,i]\right) = \left[f(x), D\left(\psi_j f \phi_i^{-1}\right) u, j\right]$. Wir stellen Df bezüglich der Karten Φ_i, Ψ_j dar und erhalten

$$\Psi_j Df \Phi_i^{-1}(y,u) = \Psi_j Df\left(\left[\phi_i^{-1}(y), u, i\right]\right) = \Psi_j\left(\left[f\phi_i^{-1}(y), D\left(\psi_j f \phi_i^{-1}\right) u, j\right]\right) = \left(\psi_j f \phi_i^{-1}(y), D\left(\psi_j f \phi_i^{-1}\right) u\right).$$

Nach Voraussetzung (f glatt) ist $\psi_j f \phi_i^{-1}$ glatt. Damit ist dann auch die obige Abbildung glatt und $D(Df) = D\left(\psi_j f \phi_i^{-1}\right) \times D^2\left(\psi_j f \phi_i^{-1}\right) = Df \times D^2 f$.

Aufgabe 2.

a) Wegen $df = (2x_1, \ldots, 2x_{n+1})$ ist $(0,\ldots,0)$ der einzige kritische Punkt. Also ist $f(0,\ldots,0) = 0$ der einzige kritische Wert.

b) Sei $\mathbb{S}^n = V_+ \cup V_-, \phi_\pm : V_\pm \to \mathbb{R}^n$ der glatte Atlas aus der Vorlesung, der die Standardstruktur auf $\mathbb{S}^n$ definiert. Sei

$$U_+ := \left\{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{1}{2} <\mid y \mid < 2\right\} - (0,\ldots,0) \times \left(\frac{1}{2}, 2\right),$$

$$U_- := \left\{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{1}{2} <\mid y \mid < 2\right\} - (0,\ldots,0) \times \left(-2, -\frac{1}{2}\right).$$

Betrachte $\alpha_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch

$$\alpha_\pm (y) := \left(\phi_\pm\left(\frac{y}{\mid y \mid}\right), \mid y \mid^2\right).$$

(Wegen $\frac{y}{|y|} \in \mathbb{S}^n$ ist das definiert.) $\alpha_\pm$ sind Diffeomorphismen auf ihr Bild.

Es gilt

$$f\alpha_\pm^{-1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = x_{n+1},$$

denn: sei $(y_1,\ldots,y_{n+1}) = \alpha_\pm^{-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})$, dann ist $f\alpha_\pm^{-1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = f(y_1,\ldots,y_{n+1}) = y_1^2 + \ldots + y_{n+1}^2 = \left(\alpha_\pm(y_1,\ldots)\right)_{n+1} = (x_1,\ldots)_{n+1} = x_{n+1}$. Also definieren $\alpha_\pm$ genau die in der Vorlesung betrachtetetn Karten für $f^{-1}(1)$.

Auf $f^{-1}(1)$ ist aber $\alpha_\pm (y) = \left(\phi_\pm (y), 1\right)$, d.h. wir bekomen genau den Atlas $\left\{(V_+, \phi_+), (V_-, \phi_-)\right\}$.

Aufgabe 3.

a) Aus

$$p(x_1,\ldots,x_k) = \sum_{r_1+\ldots+r_k=m} a_{r_1,\ldots,r_m} x_1^{r_1} \ldots, x_k^{r_k}$$

folgt wegen $\frac{\partial x_i^{r_i}}{\partial x_i} = r_i x_i^{r_i - 1}$ die Beziehung

$$\sum_{i=1}^k x_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \sum_{r_1+\ldots+r_k=m} a_{r_1,\ldots,r_m} \sum_{i=1}^k x_i x_1^{r_1} \ldots x_{i-1}^{r_{i-1}} \left(r_i x_i^{r_i-1}\right) x_{i+1}^{r_{i+1}} \ldots x_k^{r_k} =$$

$$\sum_{r_1+\ldots+r_k=m} a_{r_1,\ldots,r_m} \sum_{i=1}^k r_i x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k} == \sum_{i=1}^k r_i p(x_1,\ldots,x_k) = mp(x_1,\ldots,x_k).$$

Sei nun $(x_1, \ldots, x_k)$ ein kritischer Punkt von p. Dann ist $\frac{\partial p}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_k) = 0$ für $1 \leq i \leq k$, mit der obigen Identität folgt also $p(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{\partial p}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_k) = 0$. Also ist 0 der einzige kritische Wert von p.

b) Wenn a_1 und a_2 in der selben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R} - \{0\}$ liegen, haben sie das selbe Vorzeichen, insbesondere ist $t := \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{m}}$ definiert. Sei $(x_1, \ldots, x_k) \in p^{-1}(a_1)$, dann folgt $p(tx_1, \ldots, tx_k) = t^m p(x_1, \ldots, x_k) = \frac{a_2}{a_1} a_1 = a_2$. Also definiert Multiplikation mit t eine glatte Abbildung von $p^{-1}(a_1)$ nach $p^{-1}(a_2)$. Eine glatte Umkehrabbildung ist gegeben durch Multiplikation mit $\frac{1}{t}$.

c) $p(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ ist ein homogenes Polynom vom Grad 2, aber $p^{-1}(1)$ ist nicht diffeomorph zu $p^{-1}(-1)$.

Aufgabe 4.

a) Sei $x \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Punkt. Dann gibt es Umgebungen U von x und V von $f(x)$ und Diffeomorphismen $\phi : U \to U' \subset \mathbb{R}^m, \psi : V \to V' \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\psi f \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$. Es genügt die Behauptung in einer Umgebung von x nachzuprüfen. Wir können annehmen, dass $\psi(0) = 0$. Dann ist $\phi(M) = \phi f^{-1}(0) = \phi f^{-1} \psi^{-1}(0) = \left(\psi f \phi^{-1}\right)^{-1}(0) = \{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Also ist

$$D\phi \mid (T(M \cap U)) = T(\phi(M \cap U)) = \left(\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}\right) \times \left(\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}\right)$$

und damit

$$TM = (D\phi)^{-1}\left(\left(\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}\right) \times \left(\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}\right)\right) =$$
$$\{(x,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : \phi(x)_1 = \ldots = \phi(x)_n = 0, D\phi(v)_1 = \ldots = D\phi(v)_n = 0\}$$
$$= \{(x,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : f(x) = 0, Df(v) = 0\}.$$

b) Wir betrachten $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = <x, x> -1$. Dann wissen wir aus Aufgabe 2, dass $f^{-1}(0)$ diffeomorph zu $\mathbb{S}^n$ ist. Mit a) folgt, dass $T\mathbb{S}^n$ diffeomorph zu $\left\{(x,v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 0, Df_x(v) = 0\right\}$ ist. Wegen $Df_x = (2x_0, 2x_1, \ldots 2x_n)$, d.h., $Df_x(v) = 2(x_0 v_0 + \ldots x_n v_n)$ folgt die Behauptung.

c) Wir benutzen die Identifikation $T\mathbb{S}^n = \left\{(x,v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} : <x,x>= 1, <x,v>= 0\right\}$ aus Aufgabe b) und benutzen sie, um eine Abbildung $F : T\mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ zu definieren durch

$$F((x,v), r) := (x, v + rx).$$

Eine Umkehrabbildung $G : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \to T\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ definieren wir durch

$$G(x,w) := ((x, w - <x,w> x), <x,w>).$$

F und G sind glatt und es ist

$$GF((x,v), r) = G(x, v + rx) = (((x, v + rx - <v,x> x - r <x,x> x), <v,x> + r <x,x>) = ((x,v), r)$$

und

$$FG(x,w) = F((x, w - <x,w> x), <x,w>) = (x, w - <x,w> x + <x,w> x) = (x,w),$$

also sind F und G zueinander inverse Diffeomorphismen.