Übungen zu Topologie II

Blatt 6

Aufgabe 1.

a) Sei $k+l \geq n$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^k \times 0$ und $0 \times \mathbb{R}^l$ transversale Unterräume von $\mathbb{R}^n$ sind.
b) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $\Delta = \{(v,v) : v \in V\} \subset V \times V$ die Diagonale, $A : V \to V$ eine lineare Abbildung, und $\Gamma = \{(v, Av) : v \in V\} \subset V \times V$ der Graph von A. Zeigen Sie:
- $V \times 0$ und Δ sind transversale Unterräume von $V \times V$,
- Δ und Γ sind transversal genau dann, wenn 1 kein Eigenwert von A ist,
- $V \times 0$ und Γ sind transversal genau dann, wenn A injektiv ist.

Aufgabe 2.

Sei $g : Y \to Z$ eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, die transversal zu einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit W von Z ist. Sei $M := g^{-1}(W)$ und $y \in M$. Zeigen Sie:

$$T_y M = \left\{ v \in T_y Y : Dg(v) \in T_{g(y)} W \right\}.$$

Aufgabe 3.

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ differenzierbare Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und sei g transversal zu einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit W von Z. Zeigen Sie:
f ist transversal zu $g^{-1}(W)$ genau dann, wenn gf transversal zu W ist.

Aufgabe 4.

Sei M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:
a) für jedes $\epsilon > 0$ gibt es $v \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq v \leq \epsilon$ so dass M transversal zu $\mathbb{R}^{n-1} \times \{v\} \subset \mathbb{R}^n$ ist,
b) wenn $0 \notin M$, dann gibt es einen 1-dimensionalen Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, der transversal zu M ist.

Hinweis: Aufgabe 2 ==> Aufgabe 3 ==> Aufgabe 4.

Abgabe: Donnerstag, 22. Mai, 11.15 Uhr