Differentialtopologie

Thilo Kuessner

Definition 1. *Ein topologischer Raum ist eine Menge X mit einer Familie von Teilmengen $\tau = \{U_i \subset X : i \in I\}$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*
- $X \in \tau, \emptyset \in \tau$
- $U_1, \ldots, U_n \in \tau \Longrightarrow \cap_{i=1}^n U_i \in \tau$
- $U_j \in \tau$ für alle $j \in J \subset I \Longrightarrow \cup_{j \in J} U_j \in \tau$.

Mengen aus τ heißen offene Mengen.

Sei X ein topologischer Raum, τ seine Familie offener Mengen. Für eine Teilmenge $Y \subset X$ ist $\tau_Y := \{U_i \cap Y \subset Y : U_i \in \tau\}$ die Unterraumtopologie auf Y.

Beispiel 1. *Die Topologie auf $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $\{U \subset \mathbb{R}^n : \forall x \in U$ ex. $R > 0$, so dass $B(x, R) \subset U\}$.*

Definition 2. *Eine topologischer Raum X ist zusammenhängend, wenn es keine nichtleeren offenen Mengen U, V mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \emptyset$ gibt.*

Ein topologischer Raum X ist kompakt, wenn es für jede Überdeckung $X = \cup_{j \in J} U_j$ durch offene Mengen eine endliche Teilberdeckung gibt: $X = \cup_{i=1}^n U_{j_i}$ mit $j_1, \ldots, j_n \in J$.

Sei $Y \subset \mathbb{R}^n$.

Wenn sich alle Paare von Punkten in Y durch einen stetigen Weg verbinden lassen, dann ist Y zusammenhängend. (Die Umkehrung gilt für offene Mengen $Y \subset \mathbf{R}^n$, aber nicht füe beliebige Teilmengen $Y \subset \mathbb{R}^n$.)

$Y \subset \mathbf{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn es abgeschlossen und beschränkt (d.h. es gibt ein C mit $d(x, y) \leq C$ für alle $x, y \in Y$) ist.

Definition 3. *Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig, wenn für jede offene Menge $U \subset Y$ ihr Urbild $f^{-1}(U) \subset X$ offen ist.*

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist ein Homöomorphismus, wenn sie eine Bijektion ist und die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ stetig ist. (Mit anderen Worten: wenn es eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ mit $gf = id_X$ und $fg = id_Y$ gibt.)

Topologische Räume X, Y heissen homöomorph, wenn es einen Homöomorphismus $f : X \to Y$ gibt.

Beispiel 2. *$(-1, 1)$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^1$.*

Ein Homöomorphismus ist gegeben durch $f(x) = arctan\left(\frac{\pi}{2} x\right)$.

Definition 4. *Ein topologischer Raum X ist lokal euklidisch, wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung gibt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. (Für $U \subset X$ und einen Homöomorphismus $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ heißt (U, ϕ) eine Karte von X.)*

Beispiel 3. *Die Sphäre $S^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\right\}$ ist lokal euklidisch.*

Homöomorphismen $\phi_- : S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$ und $\phi_+ : S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, -1)\} \to \mathbb{R}^n$ sind gegeben durch stereographische Projektion

$$\phi_\pm(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 \pm x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 \pm x_{n+1}}\right),$$

die Umkehrabbildungen sind

$$\phi_{\pm}^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{1+ \mid y \mid^2}, \ldots, \frac{2y_n}{1+ \mid y \mid^2}, \frac{\pm 1+ \mid y \mid^2}{1+ \mid y \mid^2} \right).$$

.

Definition 5. *Ein topologischer Raum X ist eine topologische Mannigfaltigkeit, wenn er folgende Bedingungen erfüllt:*
- X ist lokal euklidisch
- X ist hausdorffsch (zu je zwei Punkten gibt es disjunkte offene Umgebungen)
- X hat eine abzählbare Basis (es gibt eine abzählbare Menge $\tau_0 \subset \tau$, so dass jede Menge in τ Vereinigung von Mengen in τ_0 ist).

Die Menge aller Karten von X heisst Atlas.

Falls alle Karten nach $\mathbb{R}^n$ abbilden, heißt X n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Definition 6. *Seien U, V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Ein Homöomorphismus $f : U \to V$ ist ein Diffeomorphsmus, wenn f und f^{-1} differenzierbar sind.*

Zum Beispiel ist $f(x) = x^3$ *kein* Diffeomorphismus von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$: die Umkehrabbildung ist nicht differenzierbar.

Wiederholung (Analysis II):
Satz über die Umkehrabbildung: Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $f : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung, $rank(D_x f) = n$. Dann gibt es offene Umgebungen U_1 von x und V_1 von $f(x)$, so dass $f : U_1 \to V_1$ ein Diffeomorphismus ist.

Definition 7. *Eine topologische Mannigfaltigkeit ist eine differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn für alle Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n, \psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $U \cap V = \emptyset$ die Abbildung $\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ ein Diffeomeorphismus ist.*

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist orientiert, wenn $\det\left(D\phi D\psi^{-1}\right) > 0$ für alle Karten ϕ, ψ ist.

Beispiel 4. *$\mathbb{S}^n$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Der Kartenwechsel $\phi_+\phi_-^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus (0, \ldots, 0) \to \mathbb{R}^n \setminus (0, \ldots, 0)$ ist die Inversion an der Sphäre, in Formeln: $\phi_+\phi_-^{-1}(y) = \frac{y}{|y|^2}$.

Konvention: "Mannigfaltigkeit" bedeutet in dieser Vorlesung immer: "differenzierbare Mannigfaltigkeit".

Definition 8. *Seien M, N Mannigfaltigkeiten, $x \in M$. Eine Abbildung $f : M \to N$ ist differenzierbar in x, wenn für alle Karten $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ mit $x \in U_1, f(x) \in U_2$ die Abbildung $\phi_2 f \phi_1^{-1}$ differenzierbar ist.*

Es genügt, diese Bedingung für jeweils eine Karte nachzuprüfen: sei ψ_1, ψ_2 ein zweites Paar von Karten, dann ist $\psi_2 f \psi_1^{-1} = \left(\psi_2\phi_2^{-1}\right)\left(\phi_2 f \phi_1^{-1}\right)\left(\phi_1\psi_1^{-1}\right)$ differenzierbar, weil die Kartenwechsel $\psi_2\phi_2^{-1}$ und $\phi_1\psi_1^{-1}$ differenzierbar sind.

Ein Diffeomorphismus zwischen Mannigfaltigkeiten ist, per Definition, ein Homöomorphismus f, so dass f und f^{-1} differenzierbar sind.

Beispiel 5. *Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und für jedes $x \in M$ gebe es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomeorphismus $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ mit $\phi(U \cap M) = V \cap \left(\mathbb{R}^k \times 0^{n-k}\right)$. Dann ist M eine Mannigfaltigkeit.*

Die Einschränkung von ϕ auf $U \cap M$ ist eine Karte. Kartenwechsel sind als Kompositionen von Diffeomorphismen ebenfalls Diffeomeorhismen.

Definition 9. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. $N \subset M$ ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $x \in N$ eine offene Umgebung $U \subset M$ und eine Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\phi(U \cap N) = \phi(U) \cap \left(\mathbb{R}^k \times 0^{n-k}\right)$ gibt.*

Wenn $f : M_1 \to M_2$ ein Diffeomorphismus und $N_1 \subset M_1$ eine Untermannigfaltigkeit ist, dann ist $f(N_1) \subset M_2$ eine Untermannigfaltigkeit und $f \mid N_1 : N_1 \to f(N_1)$ ein Diffeomorphismus.

Tangentialraum

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $x \in U$. Wir definieren

$$T_x U = \{\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U \text{ diffbar }, \gamma(0) = x, \epsilon > 0\} / \sim$$

mit der Äquivalenzrelation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Longleftrightarrow D_0\gamma_1 = D_0\gamma_2.$$

Die durch

$$[\gamma] \to D_0\gamma = \gamma'(0)$$

definierte Abbildung ist eine Bijektion: sie ist injektiv nach Definition der Äquivalenzrelation und surjektiv, weil es zu jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ die Kurve $\gamma(t) = x + tv$ gibt. Wir definieren den Tangentialraum an U als $TU = \bigcup_{x \in U} T_x U$ und haben dann also eine Bijektion $TU = U \times \mathbb{R}^n$.

Wenn $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und $x \in U$ sind, dann definieren wir für eine differenzierbare Abbildung $f : U \to V$

$$T_x f : T_x U \to T_{f(x)} V$$

durch

$$T_x f[\gamma] = [f \circ \gamma].$$

Das ist wohldefiniert, denn für $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ ist nach der Kettenregel $\frac{d}{dt} \mid_{t=0} (f \circ \gamma) = D_x f(\gamma'(0))$. Unter der obigen Identifikation $T_x U = \mathbb{R}^m, T_{f(x)} V = \mathbb{R}^n$ ist also $T_x f = D_x f$. Im folgenden bezeichnen wir $T_x f$ mit $D_x f$.

Definition 10. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $x \in M, \phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte mit $x \in U$. Der Tangentialraum $T_x M$ in x ist*

$$T_x M = \{\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U \text{ diffbar }, \gamma(0) = x, \epsilon > 0\} / \sim$$

mit der Äquivalenzrelation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Longleftrightarrow D_0(\phi \circ \gamma_1) = D_0(\phi \circ \gamma_2).$$

Mittels einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ hat man eine Bijektion $D_x\phi : T_x M \to T_{\phi(x)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

Definition 11. *: Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung, $x \in M$. Dann ist $D_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ definiert durch $D_x f[\gamma] = [f \circ \gamma]$.*

Wegen der Kettenregel ist $D_x f$ wohldefiniert. Falls $\phi : U \to \mathbb{R}^m, \psi : V \to \mathbb{R}^n$ Karten um $x \in M$ bzw. $f(x) \in N$ sind, dann ist $D_x f = D_x \psi^{-1} D_{\phi(x)} \left(\psi f \phi^{-1}\right) D_x \phi$.

Satz 1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine differenzierbare Abbildung mit $rank(D_x f) = n - k$ für alle $x \in f^{-1}(0)$. Dann ist $M = f^{-1}(0)$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit mit*

$$T_x M = \{v \in T_x\mathbb{R}^n : D_x f(v) = 0\}$$

für alle $x \in M$.

Beweis: Für $k=0$ folgt aus dem Satz über die Umkehrabbildung, dass $f^{-1}(0)$ aus isolierten Punkten besteht.

Wir führen den allgemeinen Fall auf den Fall $k=0$ zurück: O.B.d.A. (evtl. nach Umordnen der Variablen) ist $det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{j\geq k+1} \neq 0$. Setze $F(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_k, f(x_1,\ldots,x_n))$. Dann ist $rank(D_x f) = n$, also ist F ein lokaler Diffeomeorphismus. Insbesondere ist $f^{-1}(0) = F^{-1}\left(\mathbb{R}^k \times 0^{n-k}\right)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Für $\gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ ist $f\circ\gamma \equiv 0$, also $T_xM \subset \{v \in T_x\mathbb{R}^n : D_xf(v) = 0\}$. Weil beides k-dimensionale Vektorräume sind, muss Gleicheit gelten. QED

Beispiel 6. *$f:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1,\ldots,x_{n+1}) = x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2-1$.*

Wegen $D_xf(v) = 2 < x,v >$ ist $rkD_xf = 1$ für $x\neq 0$. Das beweist noch einmal, dass $\mathbb{S}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Der Tangentialraum ist $T_xS^n = \left\{v\in\mathbb{R}^{n+1} :< x,v >= 0\right\}$.

Für $x_{n+1}\neq 0$ ist $(x_1,\ldots,x_{n+1}) \to \left(x_1,\ldots,x_n,x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2-1\right)$ ein lokaler Diffeomorphismus.

1 Differenzierbare Abbildungen

Ziel: Klassifikation der Homotopieklassen differenzierbarer Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M,N, z.B. $[S^n,S^n] = \mathbb{Z}$ (klassifiziert durch den Abbildungsgrad, $\left[S^3,S^2\right] = \mathbb{Z}$ (klassifiziert durch die Hopf-Invariante) oder $[T^n,T^m] = Hom(\mathbb{Z}^n,\mathbb{Z}^m)$ (klassifiziert durch Homomorphismen der Fundamentalgruppe).

1.1 Kritische Werte

Definition 12. *Sei $f : M^m \to N^n$ eine differenzierbare Abbildung. Dann ist $x\in M$ ein regulärer Punkt von f, falls $rank(D_xf) = n$, ein kritischer Punkt von f sonst. $y\in N$ ist ein regulärer Wert, wenn alle $x\in f^{-1}(y)$ reguläre Punkte sind, ein kritischer Wert sonst.*

Beispiel 7. *Falls $m<n$, dann ist $y\in N$ ein regulärer Wert genau dann, wenn $y\notin f(M)$.*

Korollar 1. *Sei $f : M^m\to N^n$ eine differenzierbare Abbildung. Wenn $y\in N$ ein regulärer Wert von f ist, dann ist $f^{-1}(y)$ eine Untermannigfaltigkeit.*

Beweis: Sei $\phi : U\to\mathbf{R}^n$ eine Karte mit $y\in U$, dann ist $\phi(y)$ ein regulärer Wert von ϕf und $f^{-1}(y) = (\phi f)^{-1}(\phi(y))$. Die Behauptung folgt aus Satz 1. QED

Wiederholung (Analysis III):
Satz von Sard: Die Menge der kritischen Werte in N hat Maß 0.
Für jeden regulären Wert $y\in N$ ist $f^{-1}(y)$ eine m-n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M. Wenn M eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist, dann ist $f^{-1}(y)$ eine Mannigfaltigkeit mit (evtl. leerem) Rand.

Beispiel 8. *Für $m<n$ gibt es keine surjektiven differenzierbaren Abbildungen $f : M^m\to N^n$.*

Diese Aussage ist falsch für stetige Abbildungen, z.B. gibt es surjektive stetige Abbildungen $f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^2$.

Mannigfaltigkeiten mit Rand

Um den Begriff "Homotopie" zu definieren, brauchen wir zunchst "Mannigfaltigkeiten mit Rand".

Definition 13. *Sei*

$$H^n = \{x\in\mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$$
$$\partial H^n = \{x\in H^n : x_n = 0\}.$$

X ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, falls es hausdorffsch ist und eine abzählbare Basis besitzt, es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U und einen Homöomorphismus $\Phi : U \to \Phi(U) \subset H^n$ (eine "Karte") gibt, und zu je zwei Karten $\Phi : U \to \Phi(U) \subset H^n, \Psi : V \to \psi(V) \subset H^n$ der "Kartenwechsel" $\Phi\Psi^{-1} : \Psi(U \cap V) \to \Phi(U \cap V)$ auf $\Psi(U \cap V) - \partial H^n$ differenzierbar und auf $\Psi(U \cap V) \cap \partial H^n$ einseitig differenzierbar ist.

$N \subset M$ ist eine Untermannigfaltigkeit mit Rand, wenn die Karten für $x \in N - \partial M$ bzw. für $x \in N \cap \partial M$ so gewählt werden können, dass $\Phi(U \cap N) \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k-1} \times \{1\}$ bzw. $\Phi(U \cap N) \subset \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}^{n-k} \times [0, \infty)$ mit $\Phi(x) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}^{n-k} \times \{0\}$ liegen.

Der Rand von M ist definiert als $\partial M = \{x \in M : \Phi(x) \in \partial H^n \text{ für jede Karte } \Phi\}$. ($\partial M$ ist eine $n-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit.) M ist eine Mannigfaltigkeit ohne Rand, falls $\partial M = \emptyset$. (Zum Beispiel ist $int(M) = M - \partial M$ eine Mannigfaltigkeit ohne Rand.) Soweit nicht explizit anders erwähnt ist im folgenden eine "Mannigfaltigkeit" immer eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand.

Tangentialraum, Differenzierbarkeit und Differential werden genauso definiert wie fr Mannigfaltigkeiten ohne Rand. (Für $x \in \partial M$ ist $T_x M$ also ein Halbraum in einem n-dimensionalen Vektorraum.)

Korollar 2. *Sei $f : M^m \to N^n$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten mit Rand. Wenn $y \in int(N)$ ein regulärer Wert von f ist, dann ist $f^{-1}(y) \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand.*

Beweis: Für $x \in f^{-1}(y) - \partial M$ bekommen wir eine Kartenumgebung, indem wir Korollar 1 auf $int(M)$ anwenden.

Für $x \in f^{-1}(y) \cap \partial M$ knnen wir nach Anwenden einer Karte o.B.d.A $x \in \partial H^m \subset H^m$ und $f : H^m \to \mathbb{R}^n$ annehmen. Dann lässt sich der Beweis von Satz 1 übernehmen, womit die Behauptung darauf zurckgeführt wird, dass für eine Abbildung $F : H^n \to \mathbb{R}^n$ mit $rank D_x F = n$ das Urbild von $\mathbb{R}^k \times 0^{n-k}$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Das folgt aber aus dem Beweis des Satzes über die Umkehrabbildung.

QED

Homotopie

Definition 14. *Seien M, N Mannigfaltigkeiten. Zwei differenzierbare Abbildungen $f, g : M \to N$ heissen homotop, wenn es eine differenzierbare Abbildung $H : M \times [0,1] \to N$ mit $H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in M$ gibt.*

Beispiel 9. *Für $m < n$ ist jede differenzierbare Abbildung $f : S^m \to S^n$ homotop zur konstanten Abbildung.*

Beweis: Die Abbildung ist nicht surjektiv, hat also ihr Bild in $S^n \setminus \{p\}$ für einen Punkt $p \in \mathbb{S}^n$. Es gibt eine Homotopie $H : (S^n \setminus \{p\}) \times [0,1] \to S^n \setminus \{p\}$ zwischen der Identität und einer konstanten Abbildung. Verknüpfen mit f liefert eine Homotopie zwischen f und einer konstanten Abbildung. QED

Wir werden im folgenden Transversalitätstheorie benutzen, um zu beweisen, dass Homotopieklassen differenzierbarer Abbildungen $f : M^m \to S^n$ durch Bordismenklassen gerahmter Untermannigfaltigkeiten beschrieben werden. Im Spezialfall $m = n$ führt das auf die Definition des Abbildungsgrades: sei $y \in N^n$ ein regulärer Wert, dann besteht $f^{-1}(y)$ aus isolierten Punkten und man definiert $deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sign(D_x f)$. Der Abbildungsgrad hängt nur von der Homotopieklasse von f ab und für $N^n = S^n$ kann man beweisen, dass Abbildungen genau dann homotop sind, wenn ihre Abbildungsgrade übereinstimmen. Also $[M^n, S^n] = \mathbb{Z}$.

Beim Beweis der Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades werden wir die Klassifikation der 1-Mannigfaltigkeiten benötigen.

Beispiel 10. *Es gibt nicht-Hausdorff-1-Mannigfaltigkeiten, d.h. Räume, die alle Axiome einer differenzierbaren 1-Mannigfaltigkeit mit Ausnahme des Hausdorff-Axioms erfüllen. Wenn man zum Beispiel* $\mathbb{R}^1 \times \{0\}$ *und* $\mathbb{R}^1 \times \{1\}$ *entlang des offenen Intervalls* (a,b) *verklebt, d.h.* $(x,0) = (x,1)$ *für alle* $x \in (a,b)$ *setzt, dann ist der entstehende Raum nicht Hausdorffsch, weil für* $x_n \to a$ *die Folge* $(x_n, 0)$ *sowohl gegen* $(a,0)$ *als gegen* $(a,1)$ *konvergiert.*

Proposition 1. *Jede kompakte 1-Mannigfaltigkeit mit Rand ist hoöomorph zu* $[0,1]$ *oder* S^1.

Beweis: Jede offene, zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^1$ ist homöomorph zu (a,b), und alle offenen Intervalle sind zueinander homöomorph. Deshalb ist jede Karte von der Form $\Phi : U \to (a,b)$ (resp. mit Bild in $[a,b)$ bzw. $(a,b]$ für Randpunkte). Sei $\Psi : V \to \mathbb{R}^1$ eine zweite Karte (mit $V \not\subset U$), dann muss $\Phi(U \cap V) = (a,x) \cup (y,b)$ (evtl. $a = x$ oder $b = y$) sein (resp. (halb-)abgeschlossene Intervalle für Randpunkte). Begründung: wenn es in $\Phi(U \cap V)$ ein Intervall der Form (x,y) mit $a < x < y < b$ gäbe, dann wäre wegen $V \not\subset U$ mindestens einer der Punkte x oder y im Inneren von $\Psi(U \cap V)$, o.B.d.A. x. Dann hätten wir aber einen Punkt in V (nämlich den Grenzwert der Folge $\Phi^{-1}(x_k) \subset V$ in V, wobei x_k eine in $\Phi(U \cap V)$ gegen x konvergierende Folge ist), für den keine Umgebung zu einer Umgebung von $\Phi^{-1}(x)$ disjunkt ist, was der Hausdorff-Bedingung widerspricht.

Falls $\Phi(U \cap V) = (a,x)$ oder $\Phi(U \cap V) = (b,y)$, sieht man, dass es einen Diffeomorphismus $U \cup V \to \mathbb{R}^1$ gibt, man kann die beiden Karten also zu einer zusammenfassen.

Falls $\Phi(U \cap V) = (a,x) \cup (b,y)$, sieht man, dass es einen Diffeomoerphismus $U \cup V \to S^1$ gibt. Jede weitere Karte muss dann in $U \cup V$ enthalten sein, weil man sonst wie im vorigen Absatz einen Widerspruch zur Hausdorff-Bedingung bekäme.

Weil M kompakt ist, gibt es einen endlichen Atlas. Durch fortgesetztes Anwenden der obigen Reduktion erhalten wir entweder $M = \mathbb{S}^1$ oder dass es nur eine Karte gibt. Im zweiten Fall ist M diffeomorph zu $[0,1]$. QED

1.2 Transversalität

Definition 15. *Sei* $f : M^m \to N^n$ *eine differenzierbare Abbildung und* $L \subset N$ *eine Untermannigfaltigkeit.* f *ist transversal zu* L*, wenn für alle* $x \in f^{-1}(L)$ *gilt:*

$$T_{f(x)}L + D_x f(T_x M) = T_{f(x)}N.$$

Transversalität ist eine offene Bedingung: wenn f transversal zu L ist, dann sind hinreichend kleine Störungen von f (in der C^1-Norm) ebenfalls transversal zu L.

Beispiel 11. *Wenn* $L = \{y\}$ *dann ist* f *transversal zu* $\{y\}$ *genau dann, wenn* y *ein regulärer Wert von* f *ist.*

Satz 2. *Sei* $f : M^m \to N^n$ *eine differenzierbare Abbildung,* $L^k \subset N^n$ *eine Untermannigfaltigkeit und* f *transversal zu* L*. Dann ist* $f^{-1}(L)$ *eine (evtl. leere)* $m - n + k$*-dimensionale Untermannigfaltigkeit von* M*.*

Wenn M^m *eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist, dann ist* $f^{-1}(L)$ *eine Mannigfaltigkeit mit (evtl. leerem) Rand.*

Beweis: Sei $x \in L$. Wähle eine Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\phi(L \cap U) \subset \mathbb{R}^k \times 0^{n-k}$ (bzw. $\phi(L \cap U) = \mathbb{R}^{k-1} \times 0^{n-k} \times [0,\infty)$ falls $x \in \partial N$ ist). Sei $\pi : \mathbb{R}^n \to 0^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ die Projektion.

Weil f transversal zu L ist, ist $\pi\phi(x) = 0$ ein regulärer Wert von $\pi\phi f$. Also ist $f^{-1}(L \cap U) = (\pi\phi f)^{-1}(0)$ eine Untermannigfaltigkeit.

QED

Definition 16. *Zwei Untermannigfaltigkeiten* $L_1, L_2 \subset M$ *heissen transversal, wenn die Inklusuion* $L_1 \to M$ *transversal zu* L_2 *ist.*

Korollar 3. *Wenn* L_1, L_2 *transversale Untermannigfaltigkeiten von* N *sind, dann ist* $L_1 \cap L_2$ *eine Untermannigfaltigkeit von* L_1 *und* L_2*.*

Bemerkung 1. *Es gilt $PD(L_1 \cap L_2) = PD(L_1) \cap PD(L_2)$, wobei $PD(L_i) \in H^{n-k}(N)$ das Poincare-Dual von $j_*[L_i] \in H_k(N)$ und $\cap$ das Cup-Produkt ist.*

Wenn $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung und $L \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit ist, dann gibt es immer eine Mannigfaltigkeit S, einen Punkt $0 \in S$ und eine Abbildung $F : M \times S \to N$, so dass $F(x,0) = f(x)$ für alle $x \in M$ und F transversal zu L ist. Zum Beispiel kann man eine Einbettung $N^n \to \mathbb{R}^d$ und eine Projektion $\pi : U_\epsilon(N) \to N$ mit $D\pi\mid_{TN} = id$ wählen, $S = B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^d$ setzen und $F(x,s) = \pi(f(x)+s)$ definieren. (F ist sogar eine Submersion.)

Satz 3. *(Transversalitätssatz): Sei $F : M \times S \to N$ transversal zu einer Untermannigfaltigkeit $L \subset N$. Dann ist $f_s = F(.,s) : M \to N$ transversal zu L für fast alle s.*

(Insbesondere, wenn $S = B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^d$, dann gibt es solche s mit $\mid s \mid$ beliebig klein.)

Beweis: Setze $W = F^{-1}(L)$. Sei $\pi_2\mid_W$ die Einschränkung der Projektion $\pi_2 : M \times S \to S$ auf W. Nach dem Satz von Sard sind fast alle $s \in S$ reguläre Werte von $\pi_2\mid_W$ (und die regulären Werte liegen dicht in S).

Wir zeigen: wenn $s \in S$ ein regulärer Wert von $\pi_2\mid_W$ ist, dann ist f_s transversal zu L.

Sei $x \in W$. Dann ist $D_{(x,s)}F\left(T_{(x,s)}M \times S\right) + T_{f_s(x)}L = T_{f_s(x)}N$. Angenommen, f_s ist nicht transversal, dann gibt es ein $(v,e) \in T_{(x,s)}M \times S$ mit $D_{(x,s)}F(v,e) \notin D_x f_s(T_xM) + T_{f_s(x)}L$.

Weil s ein regulärer Wert für $\pi_2\mid_W$ ist, gibt es ein $w \in T_xM$ mit $(w,e) \in T_{(x,s)}W$, also $D_{(x,s)}F(w,e) \in T_{f_s(x)}L$. Daraus ergibt sich $D_{(x,s)}F(v-w,0) \notin D_x f_s(T_xM)$, was natürlich im Widerspruch zu $D_{(x,s)}F(v-w,0) = D_x f_s(v-w)$ steht.. QED

Genauso zeigt man: wenn M eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist, $F : M \times S \to N$ und $F\mid_{\partial M \times S}$ beide transversal zu $L \subset N$ sind, dann gilt für fast alle $s \in S$, dass $f_s : M \to N$ und $f_s\mid_{\partial M}$ beide transversal zu L sind. (Der Durchschnitt zweier Parametermengen mit vollem Maß hat wieder volles Maß.)

Wenn $f\mid_{\partial M}$ bereits transversal zu L ist, dann kann man F und f_s so wählen, dass $f_s\mid_{\partial M} = f\mid_{\partial M}$ ist. Nämlich: wähle eine Umgebung $V_\delta(\partial M) \subset M$ so klein, dass $f\mid_{V_\delta(\partial M)}$ transversal zu L ist, und wähle eine differenzierbare Funktion $h : M \to \mathbb{R}$ mit $h\mid_{\partial M} \equiv 0$ und $h\mid_{M \setminus V_\delta(\partial M)} \equiv 1$ und definiere $F(x,s) = \pi(f(x) + sh(x))$.

Insbesondere: wenn $f,g : M \to N$ transversal zu $L \subset N$ sind und $H : M \times [0,1] \to N$ eine Homotopie zwischen f und g, dann gibt es eine andere Homotopie H' zwischen f und g, die transversal zu L ist. $(H')^{-1}(L)$ ist dann eine Untermannigfaltigkeit mit Rand $f^{-1}(L) \cup g^{-1}(L)$. Die Bordisumusklasse von $f^{-1}(L)$ ist also durch die Homotopieklasse von f eindeutig bestimmt.

Beispiel 12. *(Abbildungsgrad mod 2): Sei $f : M^n \to N^n$ eine differenzierbare Abbildung zwischen kompakten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension. Dann ist $\sharp f^{-1}(y) \mod 2$ (für reguläre Werte y) wohldefiniert und hängt nur von der Homotopieklasse von f ab.*

Beweis: Vorbemerkung: $\sharp f^{-1}(y)$ ist lokal konstant, denn nach dem Satz über die Umkehrabbildung gibt es zu jedem regulr̈en Punkt (insbesondere zu jedem Punkt aus $\sharp f^{-1}(y)$) eine Umgebung, in der f ein Diffeomeorphismus ist.

Wohldefiniertheit bzgl. Homotopien: Sei $f \sim g$ und H eine Homotopie. Sei y ein regulärer Wert von f und g, dann gibt es eine Umgebung von y, auf der $\sharp f^{-1}(y)$ und $\sharp g^{-1}(y)$ konstant sind, und in dieser Umgebung gibt es einen Punkt z, der regulärer Wert von H ist. Dann ist $H^{-1}(z)$ eine 1-Mannigfaltigkeit, besteht also aus Kreisen und Intervallen, wobei die Intervalle entweder $f^{-1}(z)$ mit $g^{-1}(z)$ verbinden oder beide Endpunkte in einer der beiden Mengen haben. Es folgt $\sharp f^{-1}(y) = \sharp f^{-1}(z) \equiv \sharp g^{-1}(z) = \sharp g^{-1}(y) \mod 2$.

Unabhängigkeit vom regulären Wert: zu $y_1, y_2 \in N$ gibt es einen Diffeomorphismus $\phi : N \to N$ mit $\phi(y_1) = y_2$, der homotop zu Identität ist. y_2 ist regulärer Wert von ϕf gdw. y_1 regulärer Wert von f ist und die Anzahl der Urbilder ist die selbe. Weiter ist ϕf homotop zu f, woraus mit dem 1. Teil des Beweises folgt, dass die Anzahl von $(\phi f)^{-1}(y_2)$ und von $f^{-1}(y_2)$ modulo 2 übereinstimmen. QED

Korollar 4. *Sei M^n eine kompakte Mannigfaltigkeit. Dann ist die Identität nicht homotop zur konstanten Abbildung.*

Korollar 5. *Sei $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : \mid z \mid = 1\}$. Dann ist $f(z) = z^2$ nicht homotop zu $g(z) = z$.*

1.3 Schnitttheorie

Schnittzahl mod 2

Definition 17. *Sei $f : M^m \to N^n$ eine differenzierbare Abbildung, $L^l \subset N^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $m + l = n$, M kompakt, und f transversal zu L. Dann definieren wir die Schnittzahl modulo 2 durch $I_2(f, L) = \sharp f^{-1}(L)$ mod 2.*

Lemma 1. *Falls (unter obigen Voraussetzungen) $f : M^m \to N^n$ und $g : M^m \to N^n$ homotop und beide transversal zu $L^l \subset N^n$ sind, dann ist $I_2(f) = I_2(g)$.*

Beweis: Wir können annehmen, daß die Homotopie $H : M \times I \to N$ transversal zu L ist. Dann ist $H^{-1}(L)$ eine kompakte 1-Mannigfaltigkeit mit Rand, also $\sharp f^{-1}(L) + \sharp g^{-1}(L) = \partial H^{-1}(L)$ eine gerade Zahl. QED

Korollar 6. *Die folgende Definition ist unabhängig von der Wahl der homotopen Abbildung g.*

Definition 18. *Sei $f : M^m \to N^n$ eine differenzierbare Abbildung, $L^l \subset N^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $m + l = n$, M kompakt. Dann gibt es nach dem Transversalitätssatz eine differenzierbare Abbildung $g : M \to N$ mit $f \sim g$, die transversal zu L ist und wir definieren $I_2(f, L) = I_2(g, L)$.*

Definition 19. *Falls $K^k \subset N^n, L^l \subset N^n$ Untermannigfaltigkeiten mit $k+l = n$ sind, definieren wir $I_2(K, L) = I_2(i, L)$ für die Inklusion $i : K \to L$.*

Insbesondere heißt $I_2(K, K)$ die Selbstschnittzahl mod 2.

Beispiel 13. *Der Kern-Kreis K im Möbiusband (bzw. in der projektiven Ebene) erfüllt $I_2(K, K) = 1$.*

Beispiel 14. *Wenn $I_2(K, L) \neq 0$, dann gibt es keine Homotopie $H : K \times I \to N$, so dass H_0 die Inklusion und Bild(H_1) disjunkt von L ist.*

Für $L = \{y\}$ ist die Schnittzahl der Abbildungsgrad.

Beispiel 15. *Der reell-projektive Raum ist*

$$\mathbf{RP}^n = \mathbf{R}^{n+1} - 0/\sim$$

mit $x \sim y \Longrightarrow y = \lambda x$ mit $\lambda \in \mathbf{R}$. Ein Atlas für $\mathbf{RP}^n$ ist gegeben durch $U_i = \left\{x \in \mathbf{R}^{n+1} - 0 : x_i \neq 0\right\}$ und $\phi_i([x_0 : \ldots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$ für $i = 1, \ldots, n+1$.

Die Umkehrabbildung ist $\phi_i^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = [y_1 : \ldots : 1 : \ldots : y_n]$. Die Kartenwechsel sind gegeben durch $\phi_i \phi_j^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \left(\frac{y_1}{y_i}, \ldots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \ldots, \frac{y_j}{y_i}, \frac{1}{y_i}, \frac{y_{j+1}}{y_i}, \ldots, \frac{y_n}{y_i}\right)$.

Das Bild der kanonischen Einbettung $\mathbf{RP}^1 \to \mathbf{RP}^2$ hat Selbstschnittzahl 1. Eine (wohldefinierte) Homotopie $H : \mathbf{RP}^1 \times I \to \mathbf{RP}^2$ ist gegeben durch $H([x_1 : x_2], t) = [x_1 : x_2 : t(x_2 - x_1)]$. Für $t = 1$ bekommt man als Bild die Menge $\{[x_1 : x_2 : x_2 - x_1] : x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$, die transversal zum $\mathbf{RP}^1$ ist und ihn in genau einem Punkt, nämlich $[1 : 1]$ schneidet.

Eine Umgebung des $\mathbf{RP}^1$ in $\mathbf{RP}^2$ ist gegeben durch $U_\delta = \mathbf{RP}^1 \cup \left\{[x : y : 1] : x > \frac{1}{\delta}, y > \frac{1}{\delta}\right\}$. Das Komplement $\mathbb{R}P^2 - U_\delta$ wird durch ϕ_2 auf den $\frac{1}{\delta}$-Ball im $\mathbf{R}^2$ abgebildet. U_δ ist homöomorph zum Möbiusband.

Orientierbarkeit

Sei V ein reeller Vektorraum. Zu je zwei Basen $\{e_1, \ldots, e_n\}$ und $\{f_1, \ldots, f_n\}$ gibt es $a_{ij} \in \mathbf{R}$ mit $f_i = \sum_j a_{ij} e_j$. Sei A die Matrix mit Einträgen a_{ij}, d.h. man erhält $\{f_1, \ldots, f_n\}$ aus $\{e_1, \ldots, e_n\}$ durch Anwendung der Matrix A. Wir sagen, dass beide Basen gleichorientiert sind, wenn $det\,(A) > 0$, und dass sie unterschiedlich orientiert sind, wenn $det\,(A) < 0$. Dies definiert eine Äquivalenzrelation mit genau zwei Äquivalenzklassen auf der Menge aller Basen eines gegebenen Vektorraumes.

Für $V = \mathbf{R}^n$ bezeichnen wir die Basen in der Äquivalenzklasse der Standardbasis als positiv orientiert, die anderen Basen als negativ orientiert.

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Wir sagen, dass ein Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}$ orientierbar ist, wenn fr alle i, j das Differential des Kartenwechsels $D_y\left(\phi_i \phi_j^{-1}\right)$ in allen $y \in U_j$ positive Determinante hat:

$$det\left(D_y\left(\phi_i \phi_j^{-1}\right)\right) > 0.$$

Eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit heisst orientierbar, wenn sie einen orientierbaren Atlas hat.

Wenn M orientierbar ist und $x \in M$, dann bezeichnen wir eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $T_x M$ als positiv resp. negativ orientiert, wenn für eine Karte U_i mit $x \in U_i$ gilt, dass $\{D_x \phi_i\,(v_1), \ldots, D_x \phi_i\,(v_n)\}$ eine positiv resp. negativ orientierte Basis von $T_{f(x)} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ ist.

Diese Definition hängt für einen orientierbaren Atlas nicht von der Wahl der Karte ab. Falls $x \in U_i \cup U_j$, dann erhält man $\{D_x \phi_j\,(v_1), \ldots, D_x \phi_j\,(v_n)\}$ aus $\{D_x \phi_i\,(v_1), \ldots, D_x \phi_i\,(v_n)\}$ durch Anwendung der Matrix $D_{\phi_j(x)}\left(\phi_i \phi_j^{-1}\right)$. Die Determinante dieser Matrix ist nach Annahme positiv, also gehören $\{D_x \phi_j\,(v_1), \ldots, D_x \phi_j\,(v_n)\}$ und $\{D_x \phi_i\,(v_1), \ldots, D_x \phi_i\,(v_n)\}$ zur selben Äquivalenzklasse.

Definition 20. *Seien M, N orientierbare Mannigfaltigkeiten derselben Dimension, $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung, x ein regulärer Punkt von f. Dann ist $sign\,(D_x f) > 0$ resp. < 0 falls $D_x f$ positiv orientierte Basen von $T_x M$ in positiv resp. negativ orientierte Basen von $T_{f(x)} N$ abbildet.*

Äquivalent: bzgl. orientierter Atlanten (U_i, ϕ_i) von M und (V_j, ψ_j) von N ist $det\left(\psi_j f \phi_i^{-1}\right) > 0$ resp. < 0 für alle i, j.

Beispiel 16. *$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$. Dann ist $sign\,(D_x f) > 0$ für $x > 0$ und $sign\,(D_x) < 0$ für $x < 0$. $x = 0$ ist kein regulärer Punkt.*

Falls $f : M \to N$ eine stetig differenzierbare Abbildung ist, ist $sign\,(D_x f)$ lokal konstant auf der Menge der regulären Punkte. Falls $f : M \to M$ ein Diffeomorphismus einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist, dann sind alle Punkte reguläre Punkte und $sign\,(D_x f)$ ist konstant.

Sei $H : M \to I \to M$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $H(.,0) = id$ und $H(.,t)$ ein Diffeomorphismus für jedes t. (Zum Beispiel der Fluss eines Vektorfelds.) Dann gilt für $\Phi := H(.,1)$: $sign\,(D_x \Phi) > 0$ für alle $x \in M$.

Wenn man auf zwei Vektorräumen V und W eine Klasse von Basen als positiv orientiert ausgezeichnet hat, dann erhält man eine Orientierung auf $V \oplus W$, indem man sagt $(e_1, 0), \ldots, (e_m, 0), (0, f_1), \ldots, (0, f_n)$ ist eine positiv orientierte Basis, wobei $e_1, \ldots, e_m$ eine positiv orientierte Basis von V und $f_1, \ldots, f_n$ eine positiv orientierte Basis von W ist. Das hängt nicht von der Wahl der Repršentanten ab, denn eine Blockmatrix, deren Blcke positive Determinante haben, hat positive Determinante.

Insbesondere, wenn M und N orientierte Mannigfaltigkeiten sind, dann erhalten wir eine Orientierung auf $M \times N$.

Falls M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M ist, dann definieren wir eine Orientierung auf ∂M dadurch, dass $e_1, \ldots, e_{n-1}$ eine positiv orientierte Basis von $T_x \partial M$ ist gdw. $e_1, \ldots, e_{n-1}, h$ eine positiv orientierte Basis von $T_x M$ ist, wobei h ein nach innen zeigender Normalenvektor von ∂M ist.

Falls M eine orientierte Mannigfaltigkeit ist, dann bezeichnen wir dieselbe Mannigfaltigkeit mit entgegengesetzter Orientierung als $-M$.

Observation 1. $\partial (M \times [0,1]) = M \times \{0\} \cup (-M) \times \{1\}$.

Abbildungsgrad

Definition 21. *Sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen kompakten, orientierten Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension. Dann definieren wir*

$$deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sign(D_x f)$$

für einen regulären Wert y. Hierbei ist $sign(D_x f) = 1$, falls $D_x f$ positiv orientierte Basen in positiv orientierte Basen abbildet und $sign(D_x f) = -1$ sonst.

Bemerkung: $deg(f)$ hängt von der gewählten Orientierung ab. Wenn wir die Orientierung einer der beiden Mannigfaltigkeiten ändern, multipliziert sich der Wert von $deg(f)$ mit -1.

Bevor wir Wohldefiniertheit und Homotopieinvarianz beweisen, zeigen wir ein allgemeineres Lemma.

Lemma 2. *Sei Z eine kompakte Mf mit Rand, $F : Z^{n+1} \to N^n$ eine differenzierbare Abbildung, $y \in N$ ein regulärer Wert von F. Dann ist $deg(F|_{\partial Z}) = 0$.*

Beweis: $F^{-1}(y)$ ist eine kompakte 1-Mf, besteht also aus Kreisen und Intervallen. Sei $[a,b]$ ein Intervall in $F^{-1}(y)$ mit $a, b \in \partial Z$.

Für $x \in [a,b]$ sei $h(x)$ ein (stetig von x abhängender) Tangentialvektor an $F^{-1}(y)$. Ergänze zu einer (stetig von x abhängenden) Basis $v_1, \ldots, v_n, h$ von $T_x Z$. Wegen der stetigen Abhängigkeit sind alle diese Basen gleich orientiert, o.B.d.A. positiv.

F ist eine Submersion, d.h. $D_x F$ ist surjektiv. Wegen $D_x F(h) = 0$ muss $D_x F(v_1), \ldots, D_x F(v_n)$ dann eine Basis von $T_y N$ sein. Wegen stetiger Abhängigkeit von x müssen alle diese Basen von $T_y N$ gleich orientiert sein. Insbesondere gilt dies für $x = a$ und $x = b$.

Nun zeigt aber h entweder in a nach innen und in b nach aussen oder umgekehrt. Dementsprechend ist entweder $v_1(a), \ldots, v_n(a)$ eine positive Basis von $T_a \partial Z$ und $v_1(b), \ldots, v_n(b)$ eine negative Basis von $T_b \partial M$ oder umgekehrt. Beide Basen werden aber auf gleichorientierte Basen von $T_y N$ abgebildet. Damit ist in jedem Fall $sign(D_a F|_{\partial Z}) = -sign(D_b F|_{\partial Z})$.

Weil dies für jedes Intervall in $F^{-1}(y)$ gilt, folgt die Behauptung.

QED

Korollar 7. *a) $deg(f)$ ist unabhängig von der Wahl des regulären Wertes y.*
b) Falls $f \sim g$ homotope Abbildungen sind, dann ist $deg(f) = deg(g)$.

Beweis: Zu $y_1, y_2 \in N$ gibt es einen durch den Fluss eines Vektorfeldes definierten Diffeomorphismus $\phi : N \to N$ mit $\phi(y_1) = y_2$, der insbesondere orientierungserhaltend und homotop zur Identität ist. y_2 ist regulärer Wert von ϕf gdw. y_1 regulärer Wert von f ist und die Anzahl der Urbilder ist die selbe: wir haben $f(x) = y_1 \Leftrightarrow \phi f(x) = y_2$. Weiter ist $sign(D_x f) = sign(D_x(\phi f))$. Also ist der Abbildungsgrad von f bzgl. y_2 gleich dem Abbildungsgrad von ϕf bzgl. y_1. Weil ϕf homotop zu f ist, genügt es also b) zu zeigen.

Sei $f \sim g$ und $H : M \times I \to N$ eine Homotopie. Aus dem vorhergehenden Lemma folgt $deg\left(H|_{\partial(M \times I)}\right) = 0$, wegen $\partial(M \times [0,1]) = M \times \{0\} \cup (-M) \times \{1\}$ also $deg(f) - deg(g) = 0$.
QED

Offensichtlich gilt $deg_2(f) = deg(f) mod 2$, denn es ist $sign(D_x f) = \pm 1 \equiv 1 mod 2$ für jedes x.

Beispiel 17. *Jeder Diffeomorphismus hat Abbildungsgrad* ± 1.

Beispiel 18. *Sei* $m \in \mathbf{Z}$. $f_m : S^1 \to S^1$ *gegeben durch* $f(z) = z^m$ *hat Abbildungsgrad* m.

Beispiel 19. *Sei* $m, n \in \mathbb{N}$. *Dann hat* $\Sigma_n f_m : S^n \to S^n$ *Abbildungsgrad* m.

Bemerkung: Wenn zwei Abbildungen $f, g : S^n \to S^n$ denselben Abbildungsgrad haben, dann sind sie homotop. Das ist ein Satz von Hopf.

Anwendung: Fundamentalsatz der Algebra:

Sei p ein Polynom vom Grad m. Wir definieren eine Abbildung $f : S^2 \to S^2$ durch $f(z) = p(z)$ für $z \in \mathbf{C}$ und $f(\infty) = \infty$. Wir behaupten, dass f homotop zu $f_m(z) = z^m$, also $deg(f) = m$. Dafür müssen wir nachprüfen, dass die Homotopie $H_t = tf + (1-t) f_m$ auch in ∞ diffbar ist.

Wir können R so gross wählen, dass H_t keine Nullstellen in $\mid z \mid \geq R$ hat. Das ist möglich, weil $F_t = z^m (1 + \ldots)$ und der Ausdruck in der Klammer konvergiert gegen 1 für $z \to \infty$, ist insbesondere positiv für hinreichend grosse z. Wähle dann $\mid z \mid \geq R$ als Umgebung von ∞. Als Karte hatten wir $\phi_2(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. In dieser Karte ist $\phi_2 H_t \phi_2^{-1}(z) = \frac{1}{\overline{H_t\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}} = \frac{1}{\frac{1}{z^m} + r\left(\frac{1}{z}\right)}$ mit r ein Polynom von Grad $m-1$. Dieser Ausdruck ist in 0 differenzierbar, wie man durch explizites Nachrechnen überprüft: $\lim_{h \to 0} \frac{h^{m-1}}{1 + h^m r\left(\frac{1}{h}\right)}$ ist 0 für $m > 1$ und 1 für $m = 1$.

Urbild-Orientierung

Sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen kompakten, orientierten Mannigfaltigkeiten, $\partial N = \emptyset$, $L \subset N$ eine orientierte Untermannigfaltigkeit, f (und ∂f) transversal zu L, $S = f^{-1}(L)$.

Sei $x \in M, H_x$ das Komplement zu $T_x S$, also

$$T_x M = T_x S \oplus H_x.$$

Sei $y = f(x)$. Dann ist

$$T_y N = T_y L \oplus D_x f(H_x),$$

denn aus Transversalität und $D_x f(T_x S) = T_y L$ folgt $T_y N = T_y L + D_x f(H_x)$ und aus $T_x S = D_x f^{-1}(T_y L)$ folgt, dass $D_x f$ auf H_x injektiv ist, die Richtigkeit der Dimensionen zeigt also, dass es sich um eine direkte Summe handelt.

Die Orientierungen von $T_y N$ und $T_y L$ geben also eine Orientierung von $D_x f(H_x)$. Weil $H_x \to D_x f(H_x)$ ein Isomorphismus ist, gibt das eine Orientierung von H_x. Die Orientierungen von $T_x M$ und H_x geben eine Orientierung von $T_x S$.

Insbesondere für $dimS = 0$:

die Orientierung von $x \in f^{-1}(L)$ ist positiv gdw. $T_y L \oplus D_x f(T_x M)$ dieselbe Orientierung hat wie $T_y N$.

Lemma 3. $\partial f^{-1}(L) = (-1)^{n-l} (\partial f)^{-1}(L)$.

Beweis: Sei $x \in \partial S$, h_x ein nach innen zeigender Normalenvektor. Aus $T_x (\partial f)^{-1}(L) \oplus H_x = T_x \partial M$ folgt

$$T_x M = T_x \partial M \oplus \mathbb{R} h_x = T_x (\partial f)^{-1}(L) \oplus H_x \oplus \mathbb{R} h_x = (-1)^{n-l} T_x (\partial f)^{-1}(L) \oplus \mathbb{R} h_x \oplus H_x$$

wegen $T_x S \oplus H_x = T_x M$ also

$$T_x S = (-1)^{n-l} T_x (\partial f)^{-1}(L) \oplus \mathbb{R} h_x.$$

Wegen $T_x S = T_x \partial S \oplus \mathbb{R} h_x$ folgt

$$T_x \partial S = (-1)^{n-l} T_x (\partial f)^{-1}(L).$$

QED

Schnittzahl

Definition 22. *Sei $f : M \to N$ eine diffbare Abbildung zwischen kompakten, orientierten Mannigfaltigkeiten, transversal zu $L \subset N$ mit $dim(L) = dim(N) - dim(M)$. Dann ist $S = f^{-1}(L)$ eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit und wir definieren*

$$I(f, L) = \sum_{f(x)=y} or(x)$$

für $y \in L$, wobei $or(x) = 1$ falls die Urbild-Orientierung von x positiv ist (d.h. falls $T_yL \oplus D_xf(H_x)$ dieselbe Orientierung hat wie T_yN), und $or(x) = -1$ sonst.

Lemma 4. *Sei Z eine kompakte Mf mit Rand, $F : Z^{m+1} \to N^n$ eine differenzierbare Abbildung transversal zu $L^l \subset N^n$, $l = n - m$. Dann ist $I(F|_{\partial Z}, L) = 0$.*

Beweis: Sei $y \in L$. $S = F^{-1}(y)$ ist eine kompakte 1-Mf, besteht also aus Kreisen und Intervallen. Sei $[a, b]$ ein Intervall in $F^{-1}(y)$ mit $a, b \in \partial Z$. Für $x \in [a, b]$ sei $h(x)$ ein (stetig von x abhängender) Tangentialvektor an $F^{-1}(y)$. Ergänze zu einer (stetig von x abhängenden) Basis $v_1, \ldots, v_m, h$ von T_xZ. Wegen der stetigen Abhängigkeit sind alle diese Basen gleich orientiert, o.B.d.A. positiv. F ist transversal zu L, d.h. $D_xF(v_1), \ldots, D_xF(v_m), w_1, \ldots, w_l$ definieren eine positiv orientierte Basis von T_yN, wenn $w_1, \ldots, w_l$ eine positiv orientierte Basis von T_yL ist.

Weil dies für jedes Intervall in $F^{-1}(y)$ gilt, folgt die Behauptung.

QED

Insbesondere, wenn f und g homotope, zu L transversale Abbildungen sind, dann können wir auch die Homotopie transversal wählen und erhalten $I(f, L) = I(g, L)$. Insbesondere ist die Schnittzahl auch für nicht-transversale Abbildungen wohldefiniert, wenn wir zu einer homotopen transversalen Abbildung übergehen.

Weiterhin hängt $I(f, L)$ nicht vom Punkt $y \in L$ ab, denn zu zwei Punkten y_1, y_2 gibt es einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $\Phi : N \to N$ mit $\Phi(y_1) = y_2$ und $\Phi \sim id$.

Die Schnittzahl von Untermannigfaltigekeiten $L_1, L_2 \subset N$ ist definiert als $I(i_1, L_2)$ für die Inklusion $i_1 : L_1 \to N$.

Lemma 5. *$I(K, L) = (-1)^{kl} I(L, K)$ mit $k = dimK, l = dimL$.*

Sei M eine orientierte Mannigaltigkeit, $v_1, \ldots, v_n$ eine positive Basis von T_xM. Wir orientieren die Diagonale $\Delta \subset M \times M$ durch die Konvention, dass $(v_1, v_1), \ldots, (v_n, v_n)$ eine positive Basis von $T_{(x,x)}M \times M$ ist.

Definition 23. *Euler-Charakteristik $\chi(M) = I(\Delta, \Delta)$, wobei Δ die Diagonale in $M \times M$ ist.*

Beispiel 20. $\chi(S^1) = 0$.

Korollar 8. *Falls M eine kompakte orientierbare Mf ohne Rand, und $m = dimM$ ungerade, dann ist $\chi(M) = 0$.*

Beweis: $I(\Delta, \Delta) = (-1)^{m^2} I(\Delta, \Delta)$. QED

Lefschetz-Zahl

Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit, $f : M \to M$ ein Diffeomeorphismus, $v_1, \ldots, v_n$ eine positive Basis von T_xM. Wir orientieren den Graphen $graph(f) \subset M \times M$ durch die Konvention, dass $(v_1, Dfv_1), \ldots, (v_n, Dfv_n)$ eine positive Basis von $T_{(x,fx)}graph(f)$ ist.

Definition 24. *Sei $f : M \to M$ eine diffbare Abbildung einer kompakten, orientierbaren Mf. Dann definieren wir*

$$L(f) = I(\Delta, graph(f))$$

als Schnittzahl in $M \times M$.

Lemma 6. *Wenn $L(f) \neq 0$, dann hat f einen Fixpunkt.*

Lemma 7. *$L(f)$ ist homotopie-invariant.*

Korollar 9. *Wenn f homotop zur Identität ist, dann ist $L(f) = \chi(M)$.*

Bemerkung: Mit Homologietheorie kann man die Lefschetzzahl berechnen als $L(f) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i Tr(f_* |_{H_i})$.

Korollar 10. *Wenn Φ_t der Fluß eines Vektorfeldes auf einer kompakten, orientierbaren Mannigfaltigkeit M ist, dann ist $L(\Phi_t) = \chi(M)$.*

Korollar 11. *Wenn es auf einer kompakten, orientierbaren Mannigfaltigkeit M ein Vektorfeld ohne Nullstellen gibt, dann ist $\chi(M) = 0$.*

Beweis: Sei Φ_t der Fluß des Vektorfeldes v, also $\frac{d}{dt}\Phi_t(x)|_{t=0} = v(x)$ für alle $x \in M$.

$\epsilon(x) = inf\{t > 0 : \Phi_t(x) = x\}$ ist positiv (denn sonst wäre $v(x) = 0$ im Widerspruch zur Nullstellenfreiheit von v) und oberhalbstetig in x (denn aus $x_n \to x, t_n = \epsilon(x_n), t_n \to t, \Phi_{t_n} x_n = x_n$ folgt $\Phi_t x = x$, also $t \geq \epsilon(x)$). Weil M kompakt ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $\Phi_t(x) \neq x$ für alle $0 < t \leq \epsilon$. (Begründung: Die Mengen $U_\epsilon = \{x : \epsilon(x) > \epsilon\}$ sind offen weil $\epsilon(x)$ oberhalbstetig ist, und sie überdecken M, also gibt es eine endliche Teilüberdeckung.)

Φ_t liefert eine Homotopie zwischen $\Phi_0 = id$ und Φ_ϵ. Weil Φ_ϵ keine Fixpunkte hat, ist

$$0 = L(\Phi_\epsilon) = L(\Phi_0) = L(id) = \chi(M).$$

QED

Definition 25. *Sei M orientiert, $f : M \to M$ ein Diffeomeorphismus, x ein Fixpunkt. Wir definieren die lokale Lefschetzzahl durch*

$$L_x(f) = sign(det(D_x f - id)).$$

Lemma 8. *Sei $f : M \to M$ ein Diffeomeorphismus einer kompakten, orientierten Mf M. Dann ist*

$$L(f) = \sum_{f(x)=x} L_x(f).$$

Beweis: Schnittpunkte von Δ und $graph(f)$ sind die Fixpunkte von f, die Orientierung in einem Fixpunkt ist die Orientierung von $(v_1, v_1), \ldots, (v_n, v_n), (v_1, Dfv_1), \ldots, (v_n, Dfv_n)$, also

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & Df \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & Df - 1 \end{pmatrix} = det(Df - 1).$$

QED

Beispiel 21. *Sei $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ eine lineare Abbildung mit Eigenwerten $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n > 0$. Dann ist 0 ein Fixpunkt und $L_0 A = (-1)^{n-i}$ wobei i die eindeutig bestimmte Zahl mit $\lambda_i > 1 > \lambda_{i+1}$ ist.*

Vektorfelder Sei Φ der Fluss eines Vektorfeldes mit Nullstelle in x. Dann ist x ein Fixpunkt von Φ_t für alle t. Sei $f = \Phi_1$. Aus Lemma 8 folgt $L_x(f) = sign(det(D_x\Phi_1 - id))$.

Beispiel 22. *Für das Vektorfeld $v(x,y) = (-y, x)$ auf $\mathbf{R}^2$ hat man $L_{(0,0)} f = 1$.*

Beispiel 23. *Ein Vektorfeld auf $\mathbf{R}^2$ sei gegeben durch $v(x,y) = (\pm x, \pm y)$. Der Fluß dieses Vektorfeldes ist $\Phi_t(x,y) = (e^{\pm t}x, e^{\pm t}y)$.*

$D_{(0,0)}\Phi_1$ ist die Diagonalmatrix mit Eigenwerten $e^{\pm 1}$ und $e^{\pm 1}$.

$L_{(0,0)} = 1$ für $v(x,y) = (x,y)$ oder $v(x,y) = (-x,-y)$. $L_{(0,0)} = -1$ für $v(x,y) = (x,-y)$ oder $v(x,y) = (-x,y)$.

Wenn Φ der Fluss eines Vektorfeldes auf einer Fläche mit Nullstelle in x ist und $f = \Phi_t$ für ein kleines $t > 0$, dann ist $L_x f = 1$, falls x eine Senke oder Quelle und $L_x f = -1$, falls x ein Sattel ist.

Wenn alle Nullstellen Senken, Sattel oder Quellen sind (es also z.B. keine Nullstellen wie in Beispiel 22 gibt), dann folgt (wegen $f \sim id$) :

$$\chi(M) = Q - Sa + Se,$$

wobei Q, Sa, Se die Anzahl der Quellen, Sattel, Senken bezeichnet.

Zum Beispiel gibt es auf der Sphäre ein Vektorfeld, dessen Fluß vom Nordpol zum Südpol fließt. Dieses Vektorfeld, hat eine Senke, eine Quelle, keinen Sattel. Also ist $\chi\left(S^2\right) = 2$.

Auf der Fläche mit g Henkeln gibt es einen Fluß mit einer Senke, einer Quelle, g Satteln, also ist $\chi = 2 - 2g$.
Ein solches Vektorfeld (dessen Nullstellen Senken, Sattel oder Quellen sind) bekommt man durch den Gradientenfluss einer Höhenfunktion. Sei h die Höhenfunktion einer Flche, $V = -gradh$. Dann ist $\chi = 2 - 2g$.

Gradientenfluss.

Beispiel 24. *Sei $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ gegeben durch $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_i^2 - x_{i+1}^2 - \ldots - x_n^2$. Sei $V = -grad\ f = (-2x_1, \ldots, -2x_i, 2x_{i+1}, \ldots, 2x_n)$. Sei Φ_t der Fluß von V, also $\Phi_t(x_1, \ldots, x_n) = \left(e^{-2t}x_1, \ldots, e^{-2t}x_i, e^{2t}x_{i+1}, \ldots, e^{2t}x_n\right)$. Dann ist $L_0\Phi_t = (-1)^i$.*

Sei $f : M \to \mathbf{R}$ eine Morse-Funktion, d.h. eine differenzierbare Funktion, so dass alle kritischen Punkte nicht-entartet sind (d.h. die Hesse-Matrix in kritischen Punkten ist nicht-entartet.) Sei $V = -grad\ f$. Dieses Vektorfeld hat seine Nullstellen in den kritischen Punkten von f. Weil f entlang der Flußlinien von V streng monoton fallend ist

$$\frac{d}{dt} f(\Phi_t(x)) =< grad\ f, V >= - \parallel grad\ f \parallel^2 < 0$$

ist $\Phi_t(x) \neq x$ für $V(x) \neq 0$ und $t \neq 0$, d.h. Φ_t hat keine weiteren Fixpunkte außer den kritischen Punkten von f. Für kritische Punkte x ist $L_x\Phi_\epsilon = (-1)^{ind_x f}$. Hier ist $ind_x f$ die Anzahl der positiven Eigenwerte von $D_x^2 f$, der sogenannte Morse-Index des kritischen Punktes. Insbesondere ist $\chi(M) = \sum_{x \in Crit(f)} (-1)^{ind_x f}$.

Windungszahl und Morseindex

Definition 26. *Sei $f : M \to \mathbf{R}^n$ eine diffbare Abbildung, $z \notin Bild(f)$. Für $x \in M$ setze*

$$u(x) = \frac{f(x) - z}{\parallel f(x) - z \parallel} \in S^{n-1}.$$

Definiere $W(f, z) = deg(u)$.

Beispiel 25. *Sei $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ die Inklusion. Dann ist $W(f, 0) = 1$.*

Falls $f \sim g$ mit einer Homotopie H und $z \notin Bild(H)$, dann $W(f, z) = W_2(g, z)$.

Beispiel 26. *Sei $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}^2 - \{0\}$ gegeben durch $f\left(e^{it}\right) = r(t)e^{i\phi(t)}$. Dann ist $\phi(2\pi) = \phi(0) + 2k\pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$ und wir haben $W(f, 0) = k$.*

Man kann Inneres und Äußeres einer Kurve ohne Selbstschnitte im R^2 unterscheiden: $W(f, z) = 1$ für innere Punkte und $W(f, z) = 0$ für äußere Punkte.

Sei v ein Vektorfeld im $\mathbf{R}^n$. (Z.B. das Gradientenfeld einer Morsefunktion.) Sei x die einzige Nullstelle von v in $U \subset \mathbf{R}^n$. Sei $\gamma : S^{n-1} \to U$ eine Einbettung, dann definieren wir $\psi_\gamma : S^{n-1} \to S^{n-1}$ durch

$$\psi_\gamma(x) = \frac{v(\gamma(x))}{\parallel v(\gamma(x)) \parallel}.$$

Wenn γ die Windungszahl 1 hat, dann ist $deg(\psi_\gamma)$ der Morseindex von v in der Nullstelle x.

Brouwerscher Fixpunktsatz.

Satz 4. *Sei $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n : \parallel x \parallel \leq 1\}$. Sei $f : D^n \to D^n$ eine differenzierbare Abbildung. Dann hat f einen Fixpunkt.*

Beweis: Wir geben zwei Beweise, einen über den Abbildungsgrad und einen über die Euler-Charakteristik.

Beweis mit Abbildungsgrad. Wenn f keinen Fixpunkt hat, dann kann man eine Abbildung $r : D^n \to S^{n-1}$ mit $ri = id$ konstruieren wie folgt: $r(x)$ ist derjenige Schnittpunkt von S^{n-1} mit der Gerade durch x und $f(x)$, der näher an x liegt. Explizite Berechnung zeigt Differenzierbarkeit von r.

Wir erhalten eine wohldefinierte differenzierbare Abbildung $R : S^{n-1} \times [0,1] \to S^{n-1}$ durch $R(x,t) = r(tx)$. R ist eine Homotopie zwischen $R(.,1) = id_{S^{n-1}}$ und der konstanten Abbildung $c := R(.,0)$. Wegen $deg(id) = 1$ und $deg(c) = 0$ ist das ein Widerspruch.

Beweis mit Euler-Charakteristik. Jede stetige Abbildung $f : D^n \to D^n$ ist homotop zur Identität. Die Homotopie ist gegeben durch $H(x,t) = tf(x) + (1-t)x$, wegen

$$\parallel H(x,t) \parallel \leq t \parallel f(x) \parallel + (1-t) \parallel x \parallel \leq t + (1-t) = 1$$

ist dies tatsächlich eine Abbildung $H : D^n \times I \to D^n$.

Also muss für jede stetige Abbildung $L(f) = \chi(D^n)$ sein. Zum Beispiel für die konstante Abbildung $c \equiv 0$ hat man offensichtlich $L(c) \equiv 1$, also ist $\chi(D^n) = 1$ und es muss $L(f) = 1$ für jede stetige Abbildung gelten. Insbesondere hat jede stetige Abbildung einen Fixpunkt. QED

Bemerkung: Der Brouwersche Fixpunktsatz für stetige (nicht notwendig differenzierbare) Abbildungen folgt, weil sich jede stetige Funktion beliebig gut durch eine differenzierbare approximieren lässt. Angenommen, eine stetige Funktion f hätte keinen Fixpunkt, dann gäbe es (wegen Kompaktheit von D^n) ein $\epsilon = min\{d(x, f(x)) : x \in D^n\} > 0$. Wähle dann eine differenzierbare Funktion g mit $\parallel f - g \parallel < \frac{1}{2}\epsilon$, dann hätte auch g keine Fixpunkte im Widerspruch zum Satz.

1.4 Pontrjagin-Thom-Mannigfaltigkeiten

Beim Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes hatten wir benutzt, dass alle differenzierbaren Abbldungen $D^n \to D^n$ homotop zueinander sind. (Das liegt i.W. daran, dass D^n topologisch trivial ist.) Im allgemeinen gibt es auf komplizierteren Mannigfaltigkeiten aber unterschiedliche Homotopieklassen.

Ziel ist, Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten bis auf Homotopie zu klassifizieren. Dafür definieren wir eine Invariante solcher Abbildungen, die gerahmte Kobordismenklasse der Pontrjagin-Thom-Mannigfaltigkeit.

Definition 27. Normalenbündel: *Sei M eine Mannigfaltigkeit, $P \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit. Ein Vektorraumbündel $TP^\perp \to P$ ist ein Normalenbündel, wenn es eine (faserweise) exakte Sequenz $0 \to TP \to TM\mid_P \to TP^\perp \to 0$ gibt.*

Bemerkung: Das Normalenbündel ist bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt. Wenn man auf M eine Riemannsche Metrik hat (z.B. wenn M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^n$ ist), dann kann man $TP^\perp$ (punktweise) als orthogonales Komplement zu TP definieren. Das Normalenbündel ist bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Definition 28. Rahmung: *Eine gerahmte Untermannigfaltigkeit* P^p *einer Mannigfaltigkeit* M^m *ist eine Untermannigfaltigkeit* $P \subset M$ *mit differenzierbaren Funktionen* $v_1, \ldots, v_{m-p} : P \to TP^{\perp} \subset TM$ *für ein Normalenbündel* $TP^{\perp} \subset TM$ *zu* TP*, so dass für jedes* $x \in P$ *die Vektoren* $v_1(x), \ldots, v_{m-p}(x)$ *eine Basis von* $T_xP^{\perp}$ *bilden.*

Bemerkung: Nicht jede Untermannigfaltigkeit hat eine Rahmung. Insbesondere gibt es eine Rahmung dann und nur dann wenn das Normalenbündel trivial ist.

Beispiel: Für $M = \mathbf{R}^m$ und $p = m-1$ ist das Normalenbündel immer trivial. Die Einbettung $RP^{m-1} \subset RP^m$ hat nichttriviales Normalenbündel.

Erinnerung: für einen regulären Wert $y \in N$ einer Abbldung $f : M \to N$ ist $P := f^{-1}(y)$ eine Untermannigfaltigkeit von M. Falls $TP^{\perp}$ ein Normalenbündel zu $P \subset M$ isti, dann muss $D_xf : T_xP^{\perp} \to T_{f(x)}N$ ein Isomorphismus sein, weil D_xf surjektiv ist und T_xP auf 0 abbildet. Insbesondere haben wir einen Isomorphismus $D_xf^{-1} : T_{f(x)}N \to T_xP^{\perp}$ für das gewählte Normalenbündel und bekommen damit wie folgt eine Rahmung von P.

Definition 29. Pontrjagin-Thom-Mannigfaltigkeit: *Sei* $f : M \to N$ *eine differenzierbare Abbildung zwischen kompakten, orientierten Mannigfaltigkeiten. Sei* $y \in N$ *ein regulärer Wert von* f *und* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *eine positiv orientierte Basis von* T_yN*. Dann ist*

$$\left(f^{-1}(y), (Df)^{-1}(\mathcal{B})\right)$$

die Pontrjagin-Thom-Mannigfaltigkeit von f *mit der Rahmung* $(Df)^{-1}(\mathcal{B}) := \left\{(Df)^{-1}(v_1), \ldots, (Df)^{-1}(v_n)\right\}$.

Apriori hängt diese Mannigfaltigkeit vom regulären Wert und der gewählten Basis ab. Wir werden zeigen, dass ihre gerahmte Kobordismenklasse nicht von diesen beiden Wahlen, und auch nur von der Homotopieklasse von f, abhängt.

Definition 30. *Zwei Untermannigfaltigkeiten* $P_1, P_2 \subset M$ *einer Mannigfaltigkeit* M *heissen kobordant, wenn es eine Untermannigfaltigkeit* $P \subset M \times [0,1]$ *mit* $\partial P = P \cap M \times \{0,1\} = P_1 \times \{0\} \cup P_2 \times \{1\}$ *und* $P_1 \times [0,\epsilon) \cup P_2 \times (1-\epsilon, 1] \subset P$ *gibt.*

Zwei gerahmte Untermannigfaltigkeiten $P_1, P_2 \subset M$ *einer Mannigfaltigkeit* M *heissen gerahmt kobordant, wenn es eine gerahmte Untermannigfaltigkeit* $P \subset M \times [0,1]$ *mit* $\partial P = P_1 \times \{0\} \cup P_2 \times \{1\}$ *gibt, so dass man für* $t \in [0,\epsilon)$ *durch Einschränkung der Rahmung von* P *auf* $P_1 \times \{t\} \subset P_1 \times [0,\epsilon) \cup P_2 \times (1-\epsilon, 1] \subset P$ *die ursprünglichen Rahmung von* P_1 *und für* $t \in (1-\epsilon, 1]$ *durch Einschränkung der Rahmung von* P *auf* $P_2 \times \{t\} \subset P_1 \times [0,\epsilon) \cup P_2 \times (1-\epsilon, 1] \subset P$ *die ursprünglichen Rahmung von* P_2 *bekommt.*

Kobordismus und gerahmter Kobordismus sind Äquivalenzrelationen. (Wegen der Konstanz in einer ϵ-Umgebung des Randes können Kobordismen differenzierbar zusammengesetzt werden, woraus Transitivität folgt.)

Lemma 9. *Sei* $f : M \to N$ *eine differenzierbare Abbildung zwischen kompakten, orientierten Mannigfaltigkeiten,* $y \in N$ *ein regulärer Wert. Die gerahmte Kobordismenklasse von* $\left(f^{-1}(y), (Df)^{-1}(\mathcal{B})\right)$ *hängt nicht von der gewählten positiv orientierten Basis* $\mathcal{B}$ *ab.*

Beweis: Die positiv orientierten Basen von T_yN sind alle von der Form $A\mathcal{B}$ mit $A \in GL^+(n, \mathbb{R})$. Weil $GL^+(n, \mathbb{R})$ wegzusammenhängend ist, gibt es also zu jeder Basis $\mathcal{B}_1$ einen Weg $\mathcal{B}_t$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}_1$ im Raum der Basen. Damit bekommt man eine Rahmung von $f^{-1}(y) \times [0,1] \subset M \times [0,1]$, deren Einschränkung auf $M \times \{0,1\}$ gerade $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}_1$ ergibt.

Beweis, dass $GL^+(n, R)$ wegzusammenhängend ist: wir zeigen, dass es für jedes $A \in GL^+(n, R)$ einen Weg zur Einheitsmatrix in $GL^+(n, R)$ gibt. Mittels Spektralkalkül kann man die Matrix $\sqrt{AA^t}$ definieren, setze $B = \left(\sqrt{AA^t}\right)^{-1} A$, dann ist $B \in SO(n)$ und $C = \sqrt{AA^t}$ positiv definit und $A = CB$. Jede Matrix aus $SO(n)$ ist Produkt von Drehungen

$B = R_{\alpha_1,h1_1} \dots R_{\alpha_m,h_m}$, wobei $R_{\alpha,h}$ die Drehung um Winkel α um die Achse h bezeichnet. $R_{t\alpha_1,h_1} \dots R_{t\alpha_m,h_m}$ mit $0 \leq t \leq 1$ ist dann ein Weg von B zur Identität in $SO(n) \subset GL^+(n,R)$. Weiterhin ist $tC + (1-t) Id$ ein Weg von C zur Identität in $GL^+(n,R)$, denn für $0 \leq t \leq 1$ ist $tC + (1-t) Id$ positiv definit, insbesondere ist die Determinante positiv. Multiplikation der beiden Wege gibt einen Weg zwischen A und id. QED

Wir sprechen deshalb im folgenden nur von der gerahmten Untermannigmannigfaltigkeit $f^{-1}(y)$ ohne die gewählte Basis $\mathcal{B}$ explizit zu erwähnen.

Lemma 10. *Sei $f: M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen kompakten, orientierten Mannigfaltigkeiten. Dann gibt es zu jedem regulären Wert $y \in N$ eine offene Umgebung U, so dass für alle $z \in U$ $f^{-1}(z)$ gerahmt kobordant zu $f^{-1}(y)$ ist.*

Beweis: Die Menge der kritischen Punkte ist abgeschlossen, also kompakt. Damit ist auch die Menge der kritischen Werte kompakt, also abgeschlossen. Zu y gibt es also eine Umgebung U, so dass alle $z \in U$ reguläre Werte sind.

Sei $z \in U$. Es gibt einen Diffeomorphismus $\Phi: N \to N$ mit $\Phi(y) = z$, der homotop zur Identität ist, so dass die Homotopie U nach U abbildet und ausserhalb von U konstant ist. Insbesondere ist Φ ausserhalb von U genau die Identität. (Man nehme ein Vektorfeld entlang eines Weges von z nach y und setze es in einer kleinen Umgebung differenzierbar fort, so dass es auerhalb der Umgebung verschwindet.)

Sei Φ_t die Homotopie, dann ist also $\Phi_{-t}(z) \in U$ für alle $t \in [0,1]$, insbesondere ist $\Phi_{-t}(z)$ ein regulärer Wert von f für alle $t \in [0,1]$.

Definiere $H: M \times [0,1] \to N$ durch

$$H(x,t) = \Phi_t(f(x)).$$

Weil Φ_t ein Diffeomorphismus und f transversal zu $\Phi_{-t}(z)$ ist, ist für jedes $t \in [0,1]$ $\Phi_t \circ f$ transversal zu $\{z\}$. Insbesondere ist z regulärer Wert von H.

$H^{-1}(z)$ ist eine gerahmte Untermannigfaltigkeit von $M \times [0,1]$ mit Rand

$$\partial H^{-1}(z) = H_0^{-1}(z) \cup H_1^{-1}(z) = f^{-1}(z) \cup f^{-1}(y).$$

QED

Lemma 11. *Seien $f, g: M \to N$ differenzierbare Abbildungen zwischen kompakten, orientierten Mannigfaltigkeiten, $y \in N$ ein regulärer Wert von beiden. Wenn f und g homotop sind, dann sind $f^{-1}(y)$ und $g^{-1}(y)$ gerahmt kobordant.*

Beweis: Wähle U wie in Lemma 10 für f **und** g, d.h. jedes $z \in U$ ist regulärer Wert für beide. Nach dem Sard-Lemma gibt es ein $z \in U$, dass regulärer Wert für die Homotopie H ist. Dann ist $H^{-1}(z)$ ein gerahmter Kobordismus zwischen $f^{-1}(z)$ und $g^{-1}(z)$. Nach Lemma 10 kann man das fortsetzen zu einem gerahmten Kobordismus zwischen $f^{-1}(y)$ und $g^{-1}(y)$. QED

Lemma 12. *Sei $f: M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen kompakten, orientierten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, $y_1, y_2 \in N$ reguläre Werte. Dann ist $f^{-1}(y_1)$ gerahmt kobordant zu $f^{-1}(y_2)$.*

Beweis: Wir können die Homotopie so wählen, dass $H_t = f$ für $t < \epsilon$ und $H_t = g$ für $t > 1 - \epsilon$.

Sei $\Phi: N \to N$ ein Diffeomorphismus mit $\Phi(y_1) = y_2$, der homotop zur Identität ist.

Dann ist $\Phi \circ f \sim f$, nach Lemma 11 ist also $f^{-1}(y_1) = (\Phi \circ f)^{-1}(y_2)$ gerahmt kobordant zu $f^{-1}(y_2)$. QED