# Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

## Blatt 9

---

Aufgabe 1.

Sei $c > 0$ und $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $A(x,y,z) = (cx, cy, cz)$ für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Sei $S$ eine parametrisierte reguläre Fläche mit Gauß-Krümmung $K : S \to \mathbb{R}$ und mittlerer Krümmung $H : S \to \mathbb{R}$.
Sei $\overline{S} := A(S) = \{(cx, cy, cz) : (x,y,z) \in S\}$. Geben Sie eine Parametrisierung von $\overline{S}$ an und berechnen Sie ihre Gauß-Krümmung $\overline{K}$ und mittlere Krümmung $\overline{H}$ in Abhängigkeit von $K$ und $H$.

Lösung: Sei $\phi$ die Parametrisierung von $S$. Dann ist $\overline{\phi} = c\phi$ eine Parametrisierung von $\overline{S}$. Es ist dann $\overline{\phi}_u = c\phi_u$ und $\overline{\phi}_v = c\phi_v$, woraus $\overline{N}(Ap) = N(p)$ folgt. Es ist also

$$\overline{II}\left(\frac{\overline{\phi}_u}{\| \overline{\phi}_u \|}, \frac{\overline{\phi}_u}{\| \overline{\phi}_u \|}\right) = \frac{1}{\| \overline{\phi}_u \|^2}\overline{II}\left(\overline{\phi}_u, \overline{\phi}_u\right) = \frac{1}{\| \overline{\phi}_u \|^2} < N, \overline{\phi}_{uu} > = \frac{1}{c^2 \| \phi_u \|^2} < N, c\phi_{uu} > = \frac{1}{c} II\left(\frac{\phi_u}{\| \phi_u \|}, \frac{\phi_u}{\| \phi_u \|}\right).$$

Damit erhaält man

$$\overline{K} = \frac{1}{c^2}K, \quad \overline{H} = \frac{1}{c}H.$$

Aufgabe 2.

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $\alpha(t) = (t, t^n + 1)$ definierte Kurve
und $S_\alpha$ die Rotationsfläche zu $\alpha$ (Blatt 5, Aufgabe 3).
a) Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve $\alpha$.
b) Zeigen Sie:
- für $x = 0$ hat $S_\alpha$ in $(x,y,z) \in S_\alpha$ einen Flachpunkt,
- für $x \neq 0$ hat $S_\alpha$ in $(x,y,z) \in S_\alpha$ negative Gauß-Krümmung.

Lösung: a) Unter Benutzung von Blatt 3, Aufgabe 3, erhält man

$$k = \frac{n(n-1)t^{n-2}}{(1 + n^2 t^{2n-2})^{\frac{3}{2}}}.$$

b) Man berechnet

$$I = \begin{pmatrix} 1 + n^2 t^{2n-2} & 0 \\ 0 & (t^n + 1)^2 \end{pmatrix}$$

und

$$II = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}}} \begin{pmatrix} -n(n-1)t^{n-2} & 0 \\ 0 & t^n + 1 \end{pmatrix}.$$

Für $t = 0$ ist $II = 0$, man hat also einen Flachpunkt. Die Gauß-Krümmung ist (für $t \neq 0$)

$$K = \frac{-n(n-1)t^{n-2}}{(1 + n^2 t^{2n-2})^2 (t^n + 1)} < 0.$$

Aufgabe 3.

a) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit $(0,0,0) \in S$ und $z > 0$ für alle $(x,y,z) \in S - \{(0,0,0)\}$.
Zeigen Sie: $K(0,0,0) \geq 0$.
b) Zeigen Sie, daß die Umkehrung von a) nicht gilt, d.h. geben Sie eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit Gauß-Krümmung $K \geq 0$ an, für die gilt:
- $(0,0,0) \in S$

- $T_{(0,0,0)}S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$
- $S \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\} \neq \emptyset$ und $S \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\} \neq \emptyset$.

Lösung:
a) Sei $\phi$ Parametrisierung einer Umgebung von $(0,0,0)$. Wir können annehmen, daß $N(0,0,0) = (0,0,1)$ (sonst nehmen wir die Parametrisierung $\phi(-u,v)$).
Aus den Voraussetzungen folgt, daß $(0,0,0)$ ein Minimum von $\phi_3$ ist, also

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial u}(0,0,0) = \frac{\partial \phi_3}{\partial v}(0,0,0) = 0$$

und

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial u^2}(0,0,0) & \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y \partial v}(0,0,0) \\ \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial u \partial v}(0,0,0) & \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial v^2}(0,0,0) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Wegen $e =< N, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} >=< (0,0,1), \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} >= \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial u^2}$ und analog $f = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial u \partial v}, g = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial v^2}$ (alles in $(0,0,0)$) heißt das

$$\det \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \geq 0$$

woraus $K(0,0,0) \geq 0$ folgt.
b) Sei $S$ die Fläche parametrisiert durch

$$\phi(u,v) = \left(u, v, u^3\left(1+v^2\right)\right).$$

Es ist $N(0,0,0) = (0,0,1)$ und (mit der Abkürzung $P(v) = 1 + v^2$):

$$e = 6uP(v), f = 3u^2 P'(v), g = u^3 P''(v)$$

also

$$eg - f^2 = 6u^4 \left(PP'' - \frac{3}{2}(P')^2\right).$$

In einer Umgebung von $(0,0,0)$ ist $PP' = 2 + 2v^2 \geq 2$ sicher grösser als $\frac{3}{2}(P')^2 = 6v^2$. Wenn wir also die parametrisierte Fläche auf eine hinreichend kleine Umgebung des Nullpunktes einschränken, ist auf der gesamten Fläche $K \geq 0$. Es ist $(0,0,0) \in S$ und $T_{(0,0,0)}$ die $x-y-$Ebene, aber die Fläche ist, auch in einer beliebig kleinen Umgebung von $(0,0,0)$, nicht in einem Halbraum enthalten.

(Ein noch einfacheres Beispiel ist $\phi(u,v) = \left(u,v,u^3\right)$. In diesem Fall ist $K \equiv 0$.)

Aufgabe 4.

Zeigen Sie, daß es keine kompakte reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit überall negativer Gauß-Krümmung gibt.
(Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.)

Lösung: Weil $S$ beschränkt ist, existiert $sup\{\| x \| : x \in S\}$. Weil $S$ abgeschlossen ist, wird dieses Supremum angenommen. Sei also $x \in S$ mit maximalem $\| x \|$. Das heisst $S$ liegt in $B(0, \| x \|)$ und $x \in S \cap \partial B$. Nach Drehung und Verschiebung können wir annehmen, daß $x = (0,0,0)$ und die Tangentialebene an $\partial B$ die $x-y-$Ebene ist.

Es folgt mit Aufgabe 3 $K(0,0,0) \geq 0$.

(Man bemerke noch, daß $K$ sich bei Drehungen und Verschiebungen nicht ändert.)