Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 8

Aufgabe 1.

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $p \in S$ nicht planar. Zeigen Sie: wenn $H(p) = 0$, dann gibt es zwei asymptotische Richtungen, die in p aufeinander senkrecht stehen.

Lösung:
Seien k_1, k_2 die Hauptkrümmungen in p. Aus $H(p) = 0$ folgt $k_2 = -k_1$. Somit

$$k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta = k_1 \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right).$$

$k_n = 0$ gilt also genau für $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$. Diese beiden Richtungen stehen senkrecht aufeinander.

Aufgabe 2.

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve mit $\alpha_2(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei β die Reparametrisierung von α nach Bogenlänge. Zu α bzw. β seien S_α bzw. S_β die in Blatt 5, Aufgabe 3, definierten Rotationsflächen. Wir bezeichnen mit $II^\alpha_{(x,y,z)}$ bzw. $II^\beta_{(x,y,z)}$ die zweite Fundamentalform von S_α bzw. S_β in $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie: für $x = \alpha_1(t)$ gilt:

$$II^\beta_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \parallel \alpha'(t) \parallel & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} II^\alpha_{(x,y,z)}.$$

Lösung: Sei β die Reparametrisierung von α nach Bogenlänge, d.h. $\beta(t) = \alpha(s(t))$ und $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}$. Aus der Kettenregel ergibt sich dann $\beta'(t) = \frac{ds}{dt}\alpha'(s(t)) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\alpha'(s(t))$.
Seien Φ_α bzw. Φ_β die Parametrisierungen. Dann ist

$$\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial u}(t,v) = (\beta_1'(t), \beta_2'(t) fv, \beta_2'(t) gv) = \frac{1}{\parallel \alpha'(t) \parallel}(\alpha_1'(s(t)), \alpha_2'(s(t)) fv, \alpha_2'(s(t)) gv) = \frac{1}{\parallel \alpha'(t) \parallel}\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial u}(s(t), v)$$

und

$$\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial v}(t,v) = (0, \beta_2(t) f'v, \beta_2(t) g'v) = (0, \alpha_2(s(t)) f'v, \alpha_2(s(t)) g'v) = \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v}(s(t), v).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial u}(t,v) \times \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial v}(t,v) = \frac{1}{\parallel \alpha'(t) \parallel}\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial u}(s(t), v) \times \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v}(s(t), v)$$

also (nach Normierung)

$$N_\beta(t,v) = N_\alpha(s(t), v).$$

Weil $\frac{\partial^2 \phi_\beta}{\partial u^2} = \left(\frac{d}{du}\frac{1}{\|\alpha'(u)\|}\right)\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial u} + \frac{1}{\|\alpha'(u)\|}\frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial u^2}$ und weil N auf dem Tangentialvektor $\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial u}$ senkrecht steht, gilt

$$II^\beta\left(\frac{\partial \phi_\beta}{\partial u}, \frac{\partial \phi_\beta}{\partial u}\right) = < N_\beta, \frac{\partial^2 \phi_\beta}{\partial u^2} > = \frac{1}{\parallel \alpha'(u) \parallel} < N_\beta, \frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial u^2} >$$

$$= \frac{1}{\parallel \alpha'(u) \parallel} < N_\alpha, \frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial u^2} > = \frac{1}{\parallel \alpha'(u) \parallel} II^\alpha\left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial u}, \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial u}\right) = \parallel \alpha' \parallel II^\alpha\left(\frac{\partial \phi_\beta}{\partial u}, \frac{\partial \phi_\beta}{\partial u}\right),$$

ähnlich

$$II^\beta\left(\frac{\partial \phi_\beta}{\partial v}, \frac{\partial \phi_\beta}{\partial v}\right) = II^\alpha\left(\frac{\partial \phi_\beta}{\partial u}, \frac{\partial \phi_\beta}{\partial u}\right).$$

Aufgabe 3.

Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene, $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, und $C \subset S$ eine Kurve mit $T_pS = E$ für alle $p \in C$. Zeigen Sie: alle Punkte $p \in C$ sind parabolisch oder planar.

Lösung: Es ist N konstant entlang C also $TN\left(\dot{C}\right) = 0$ in jedem Punkt von C. TN ist nicht injektiv, also $det\,(TN) = 0$ in $p \in C$. Es folgt, daß p parabolisch oder planar sein muß.

Aufgabe 4.

Sei $\alpha(t) := \left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}, \sin t\right), t \in (0,\pi)$ die Traktrix und S_α die zugehörige Rotationsfläche.
a) Zeigen Sie, daß S_α für $x \neq 0$ in $(x,y,z) \in S_\alpha$ regulär ist.
b) Berechnen Sie die zweite Fundamentalform von S_α (in allen regulären Punkten).
c) Zeigen Sie, daß in allen regulären Punkten die Gauß-Krümmung negativ ist.

Lösung: Eine Parametrisierung von S_α ist gegeben durch

$$\phi(u,v) = \left(\cos u + \log\tan\frac{u}{2}, \sin u\cos v, \sin u \sin v\right).$$

Also $\frac{\partial\phi}{\partial u} = \left(\frac{\cos^2 u}{\sin u}, \cos u\cos v, \cos u \sin v\right)$ und $\frac{\partial\phi}{\partial v} = (0, -\sin u\sin v, \sin u\cos v)$,
woraus $\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v} = \left(\sin u\cos u, -\cos^2 u\cos v, -\cos^2 u\sin v\right)$ folgt, also (falls $\| \frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v} \| = \cos u \neq 0$)

$$N(\phi(u,v)) = (\sin u, -\cos u\cos v, -\cos u\sin v).$$

(Insbesondere ist die Fläche regulär für $\cos u \neq 0$, d.h. $x \neq 0$.)

Damit erhalten wir $\frac{\partial(N\phi)}{\partial u}(u,v) = (\cos u, \sin u\cos v, \sin u\sin v)$ und $\frac{\partial(N\phi)}{\partial u}(u,v) = (0, \cos u\sin v, -\cos u\cos v)$,

woraus

$$II = \begin{pmatrix} -\cot u\left(1+\sin^2 u\right) + \cos u\sin u & 0 \\ 0 & \cos u\sin u \end{pmatrix}$$

bzgl. der Basis $\{\phi_u, \phi_v\}$ folgt.

Es ist $\| \Phi_u \| = \cot u$ und $\| \Phi_v \| = \sin u$. Bzgl. der ON-Basis $\left\{\frac{1}{\cot u}\phi_u, \frac{1}{\sin u}\phi_v\right\}$ haben wir also

$$II = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\cot u}\left(1+\sin^2 u\right) + \frac{\sin^3 u}{\cos u} & 0 \\ 0 & \cot u \end{pmatrix}.$$

Weil die Matrix diagonal ist, kann man natürlich sofort die Hauptkrümmungen und damit auch die Gauss- und mittlere Krümmung ablesen.

Für die Gausskrümmung ergibt sich

$$K = -\left(1+\sin^2 u\right) + \sin^2 u = -1,$$

also hat die Pseudosphäre konstante negative Krümmung.