Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 7

Aufgabe 1.

Geben Sie eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ an, so daß 0 ein regulärer Wert und $f^{-1}(0)$ ein Torus ist.

Lösung: $f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2 + z^2 - 1$. Es ist

$$Tf = \left(2\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2z\right).$$

$Tf = 0$ gilt also nur für $x = y = z = 0$ oder $x^2+y^2 = 4, z = 0$. In beiden Fällen ist $f(x,y,z) = 3$. Also ist 0 (oder jeder andere Wert $\neq 3$) ein regulärer Wert.

Aufgabe 2.

Zu einer regulären ebenen Kurve $\alpha(t) := (\alpha_1(t), \alpha_2(t)), t \in \mathbb{R}$, mit $\alpha_2(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ für $t_1 \neq t_2$, sei $S_\alpha := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1(t), y^2+z^2 = \alpha_2(t)^2 \text{ für ein } t \in \mathbb{R}\right\}$ die zugehörige Rotationsfläche.

a) Berechnen Sie die zu der Parametrisierung

$$(u,v) \to (\alpha_1(u), \alpha_2(u)\cos v, \alpha_2(u)\sin v)$$

gehörende erste Fundamentalform.

b) Zeigen Sie: es gibt eine Reparametrisierung mit $F = 0, G = 1$ und E hängt nur von einer Variablen ab.

Lösung: a) $E = \| \alpha'(u) \|^2, F = 0, G = | \alpha_2(u) |^2$.

b) Reparametrisiere α nach Bogenlänge und vertausche u und v.

Aufgabe 3.

a) Sei $\alpha(t) := (\alpha_1(t), \alpha_2(t)), t \in \mathbb{R}$, eine reguläre ebene Kurve mit $\alpha_2(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_2(t)\,dt < \infty$. Sei $S_\alpha := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1(t), y^2+z^2 = \alpha_2(t)^2 \text{ für ein } t \in \mathbb{R}\right\}$ die zugehörige Rotationsfläche. Berechnen Sie den Flächeninhalt von S_α.

b) Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte, Kurve mit $k(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Wir definieren die Tube vom Radius 1 um α als die durch die Parametrisierung

$$\phi(u,v) = \alpha(u) + \cos v n(u) + \sin v b(u)$$

gegebene reguläre Fläche. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Tube in Abhängigkeit von der Länge von α.

Lösung: a) Nach Umparametrisierung auf Bogenlänge erhält man $area = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_2(u)\,du$. Allgemein erhält man $area = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_2(u) \| \alpha'(u) \| \,du$.

b) Es ist, unter Benutzung der Frenet-Formeln,

$$x_u = t + \cos v(-kt - \tau b) + \sin v \tau n$$

$$x_v = \cos v b - \sin v n$$

also

$$x_u \times x_v = \cos v(k\cos v - 1)n + \sin v(k\cos v - 1)b.$$

Wegen $< n, b >= 0$ folgt $\mid x_u \times x_v \mid = \mid k\cos v - 1 \mid$, also

$$A = \int_I \int_0^{2\pi} \mid k\cos v - 1 \mid dvdu.$$

(Falls $k \leq 1$, kann man dies noch weiter vereinfachen. Es ist dann $\mid k\cos v - 1 \mid = 1 - k\cos v$. Wegen $\int_0^{2\pi} \cos v dv = 0$ folgt $\int_I \int_0^{2\pi} 1 - k\cos v dv du = 2\pi \int_I 1 du = 2\pi l(\alpha)$.)

Aufgabe 4.

Unter einer Orientierung einer Fläche verstehen wir eine Überdeckung $S = \cup_{i\in I} V_i$ durch offene Mengen und Parametrisierungen $\phi_i : U_i \to V_i, U_i \subset \mathbb{R}^2$, so daß $\det T\left(\phi_j^{-1}\phi_i\right)$ für alle $i, j \in I$ in jedem Punkt $x \in V_i \cap V_j$ positiv ist. (Eine Fläche ist also genau dann orientierbar, wenn sie eine Orientierung besitzt.) Wir sagen, daß zwei Orientierungen $\{(V_i, \phi_i) : i \in I\}$ und $\{(W_k, \psi_k) : k \in K\}$ gleich sind, wenn die Vereinigung $\{(V_i, \phi_i) : i \in I\} \cup \{(W_k, \psi_k) : k \in K\}$ eine Orientierung ist. (Mit anderen Worten: wenn für alle $i \in I, k \in K$ und $x \in V_i \cap W_k$ gilt: $\det T\left(\psi_k^{-1}\phi_i\right) > 0$.)
Zeigen Sie: eine orientierbare Fläche hat genau zwei verschiedene Orientierungen.

Lösung: Zu einer Orientierung kann man wie in der Vorlesung ein differenzierbares Normalenvektorfeld N angeben. $-N$ entspricht dann gerade der durch $\psi_i(u, v) := \phi_i(-u, v)$ gegebenen Orientierung. ((V_i, ψ_i) mit $U_i' = \{(-x, y) : (x, y) \in U_i\}, \psi_i : U_i' \to V_i$, ist eine andere Orientierung als (U_i, ϕ_i), denn die Kartenwechsel haben Determinante -1.)

Es ist klar, daß es neben N und $-N$ keine anderen Normalenvektorfelder geben kann: jedes Normalenvektorfeld N' wäre punktweise $N'(p) = C(p) N(p)$ mit $C(p) = \pm 1$. Wegen Differenzierbarkeit (insbesondere Stetigkeit) muß dann aber C konstant sein.

Es bleibt also zu zeigen: zwei Orientierungen sind gleich, wenn sie dasselbe Normalenvektorfeld bestimmen.

Angenommen, $\{(V_i, \phi_i) : i \in I\}$ und $\{(W_k, \psi_k) : k \in K\}$ bestimmen das Normalenvektorfeld N, d.h.

$$N = \frac{\frac{\partial \psi_k}{\partial u} \times \frac{\partial \psi_k}{\partial v}}{\| \frac{\partial \psi_k}{\partial u} \times \frac{\partial \psi_k}{\partial v} \|} = \frac{\frac{\partial \phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_i}{\partial v}}{\| \frac{\partial \phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \|}$$

aber $\det T\left(\psi_k^{-1}\phi_i\right) < 0$. Dann folgt aber

$$N = \frac{\frac{\partial \psi_k}{\partial u} \times \frac{\partial \psi_k}{\partial v}}{\| \frac{\partial \psi_k}{\partial u} \times \frac{\partial \psi_k}{\partial v} \|} = \det T\left(\psi_k^{-1}\phi_i\right) \frac{\frac{\partial \phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_i}{\partial v}}{\| \frac{\partial \phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \|} = CN$$

mit $C = \det T\left(\psi_k^{-1}\phi_i\right) < 0$, also ein Widerspruch.