Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 6 - Lösungen

Aufgabe 1.

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Geben Sie Parametrisierungen für das Ellipsoid

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

an und berechnen Sie die zugehörige erste Fundamentalform.

Lösung: Man definiert Parametrisierungen

$$x : (\phi, \psi) \to (a\cos\phi, b\sin\phi\cos\psi, c\sin\phi\sin\psi)$$

etwa auf $U_1 = (0, 2\pi) \times (0, \pi), U_2 = (0, 2\pi) \times \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), U_3 = (\pi, 3\pi) \times (0, \pi), U_4 = (\pi, 3\pi) \times \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Dann ist $\frac{\partial x}{\partial \phi} = (-a\sin\phi, b\cos\phi\cos\psi, c\cos\phi\sin\psi)$ und $\frac{\partial x}{\partial \psi} = (0, -b\sin\phi\sin\psi, c\sin\phi\cos\psi)$. Damit erhält man

$$E = a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi + \left(c^2 - b^2\right)\cos^2\phi\sin^2\psi$$

$$F = \left(c^2 - b^2\right)\sin\phi\cos\phi\sin\psi\cos\psi$$

$$G = b^2\sin^2\phi + \left(c^2 - b^2\right)\sin^2\phi\cos^2\psi.$$

Aufgabe 2.

Sei S eine reguläre Fläche und $f : S \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.
a) Zeigen Sie, daß es in jedem $p \in S$ einen eindeutigen Vektor $grad\ f(p) \in T_pS \subset \mathbb{R}^3$ gibt, so daß

$$< grad\ f(p), v >_p = Tf_p(v)$$

für *alle* $v \in T_pS$ gilt. (Dieser Vektor heißt der Gradient von f in p.)

Lösung: Die durch $\Phi(v)(w) :=< w, v >$ für $v, w \in T_pS$ definierte Abbildung $\phi : T_pS \to (T_pS)^*$ ist offensichtlich ein Homomorphismus. Sie ist injektiv, denn für $v \neq 0$ ist z.B.

$$\Phi(v)(v) =< v, v >=\| v \|^2 \neq 0,$$

also ist für $v \neq 0$ auch $\Phi(v) \neq 0$. Weil beide Vektorräume zweidimensional sind, folgt aus Injektivität aber sofort auch Surjektivität. Insbesondere gibt es zu $Tf_p \in (T_pS)^*$ also ein $w \in T_pS$ mit $\Phi(w) = Tf_p$. Wenn wir $grad\ f(p) := w$ setzen, erhalten wir die Behauptung.

b) Sei $p \in S$. Zeigen Sie:

$$max\left\{Tf_p(v) : v \in T_pS, \| v \| = 1\right\} = Tf_p\left(\frac{grad\ f(p)}{\| grad\ f(p) \|}\right).$$

Lösung: Nach a) ist $Tf_p(v) =< grad\ f(p), v >=\| grad\ f(p) \| . \| v \| . \cos\angle(grad\ f(p), v)$. Mit $\| v \| = 1$ also

$$Tf_p(v) =\| grad\ f(p) \| \cos\angle(grad\ f(p), v).$$

Dieser Ausdruck wird offensichtlich maximal für $\cos\angle(grad\ f(p), v) = 1$, d.h. $\angle(grad\ f(p), v) = 0$. Also muß $v = C.grad\ f(p)$ mit $C > 0$ sein. Wegen $\| v \| = 1$ folgt $C = \frac{1}{\|grad\ f(p)\|}$.

Aufgabe 3.

Sei S eine reguläre Fläche und $f : S \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.
a) Es gelte, daß für alle Nullstellen von f der Gradient von f nicht verschwindet, d.h. für alle $p \in S$ mit $f(p) = 0$ sei $grad\ f(p) \neq 0$.
Zeigen Sie, daß

$$\{p \in S : f(p) = 0\}$$

eine reguläre Kurve ist, die in jedem Punkt p senkrecht zu $grad\ f(p)$ ist.
b) Geben Sie ein Beispiel einer regulären Fläche S und einer differenzierbaren nichtkonstanten Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ an, für die $\{p \in S : f(p) = 0\}$ keine reguläre Kurve ist.

Lösung: a) Sei $p \in S$ (mit $f(p) = 0$) und $\phi : U \to V$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung einer Umgebung V von p. Dann ist $f\phi$ eine Abbildung von U nach $\mathbb{R}$. Es gibt ein $q \in U$ mit $\phi(q) = p$. Es gilt für $v \in T_qU$:

$$< grad\,(f\phi)(q), v >= D(f\phi)(q)\,v = Df(p)\,D\phi(q)\,v = grad\ f(p)\,D\phi(q)\,v.$$

Aus $grad\ f(p) \neq 0$ folgt also $grad\,(f\phi)(q) \neq 0$ (weil $D\phi(q)$ injektiv ist).
Für jedes p mit $f(p) = 0$ und für q mit $\phi(q) = p$ gilt also $grad\,(f\phi)(q) \neq 0$. Das heißt aber gerade, daß 0 ein regulärer Wert von $f\phi : U \to \mathbb{R}$ ist. Also ist $f\phi^{-1}(0)$ eine reguläre Kurve. Es ist aber $f\phi^{-1}(0) = \phi^{-1}\left(f^{-1}(0)\right)$. Weil ϕ^{-1} ein Diffeomorphismus ist, folgt, daß $f^{-1}(0) \cap V$ eine reguläre Kurve ist. Damit haben wir gezeigt, daß die Regularitätsbedingung in jedem Punkt von $f^{-1}(0)$ erfüllt ist.

Weil f auf $C = f^{-1}(0)$ konstant ist, ist $Df(v) = 0$ für $v \in T_pC$. Nach Aufgabe 2 ist also $< grad\ f(p), v >= 0$. Die Kurve C ist also senkrecht auf $grad\ f$ in jedem Punkt.

b) $S = \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^2 + y^2$.

Aufgabe 4.

Sei $S = U_1 \cup U_2$ eine reguläre Fläche und seien $\phi_i : \mathbb{R}^2 \to U_i, i = 1,2$, Diffeomorphismen. Wir nehmen an, daß eine Zerlegung des Durchschnittes $U_1 \cap U_2 = V_1 \cup V_2$ existiert, so daß $det\ T\left(\phi_2^{-1}\phi_1\right)$ auf V_1 positiv und auf V_2 negativ ist. Zeigen Sie: S ist nicht orientierbar, d.h. auch für eine beliebige andere Wahl von Parametrisierungen ist es nicht möglich, orientierungs-erhaltende Koordinatenübergänge zu haben.
Hinweis: Zeigen Sie, daß es kein differenzierbares Normalenvektorfeld gibt.

Lösung: Wenn S orientierbar ist, dann gibt es ein differenzierbares Normalenvektorfeld N auf S. Dann sind $N_1 = \phi_1^* N$ und $N_2 = \phi_2^* N$ differenzierbare Normalenvektorfelder auf U_1 bzw. U_2. (Genauer: für $N(\phi_1(p)) = \frac{T\phi_1(v_1) \times T\phi_1(v_2)}{\|T\phi_1(v_1) \times T\phi_1(v_2)\|}(\phi_1(p))$ definieren wir $N_1(p) = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}(p) \in \mathbb{R}^3$, entsprechend für N_2.)

N_1 und N_2 sind differenzierbare Normalenvektorfelder auf Teilmengen des $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Also darf ihre z-Komponente nie 0 sein. O.B.d.A. habe N_1 überall positive z-Komponente.

Auf $U_1 \cap U_2$ gilt $N_2 = T\left(\phi_2^{-1}\phi_1\right) N_1$. Also muß N_2 auf V_1 positive und auf V_2 negative z-Komponente haben. Widerspruch, denn die z-Komponente von N_2 muß entweder überall positiv oder überall negativ sein.