Math. Institut der Univ. Siegen, Prof. Dr. U. Koschorke, Dr. T. Kuessner 9. November 2004

Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 5 - Lösungen

Aufgabe 1.

Für $r > 0$ sei

$$Z(r) := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r \right\}.$$

a) Zeigen Sie, daß $Z(r)$ eine reguläre Fläche ist.
b) Seien $r_1, r_2 > 0$. Zeigen Sie, daß $Z(r_1)$ und $Z(r_2)$ diffeomorph sind.

Lösung:
a) Sei $V_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \neq (1, 0) \right\}$ und $V_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \neq (-1, 0) \right\}$. Es ist klar, daß jedes $(x, y, z) \in S$ mindestens in einem der beiden $V_i \cap S, i = 1, 2$, liegt. Sei $U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. ($U$ ist offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Wir definieren Karten $\phi_1 : U \to V_1$ und $\phi_2 : U \to V_2$ durch

$$\phi_1(u, v) = \left(\sqrt{r} \cos u, \sqrt{r} \sin u, v \right)$$

und

$$\phi_2(u, v) = \left(\sqrt{r} \cos(u + \pi), \sqrt{r} \sin(u + \pi), v \right).$$

Die Abbildungen sind differenzierbar. $D\phi_1$ ist in jedem Punkt (u, v) injektiv, denn

$$\left(\sqrt{r} \cos u, \sqrt{r} \sin u, 0 \right) \times (0, 0, 1) = \left(\sqrt{r} \cos u, \sqrt{r} \sin u, 0 \right) \neq (0, 0, 0).$$

Analog ist $D\phi_2$ injektiv wegen $(\sqrt{r} \cos(u + \pi), \sqrt{r} \sin(u + \pi), 0) \times (0, 0, 1) = (\sqrt{r} \cos(u + \pi), \sqrt{r} \sin(u + \pi), 0) \neq (0, 0, 0)$. (Sinus und Kosinus können nicht gleichzeitig verschwinden.)

Es bleibt zu zeigen, daß$\phi_i : U \to V_i \cap S$ ein Homöomorphismus ist ($i = 1, 2$).
Surjektivität von ϕ_1 (ϕ_2 analog): zu (x, y, z) mit $x^2 + y^2 = r$ und $(x, y) \neq (1, 0)$ wähle $v = r$ und $u \in (0, 2\pi)$ so daß $\cos u = \frac{x}{\sqrt{r}}, \sin u = \frac{y}{\sqrt{r}}$.
Injektivität gilt, weil wir u auf $(0, 2\pi)$ eingeschränkt haben.
Wir müssen noch zeigen, daß die Umkehrabbildung stetig ist. Sei ϕ_1^{-1} nicht stetig. Dann gibt es also eine Folge (u_n, v_n) mit $(\sqrt{r} \cos u_n, \sqrt{r} \sin u_n, v_n) \to (\sqrt{r} \cos u, \sqrt{r} \sin u, v)$ aber $(u_n, v_n) \not\to (u, v)$. Das ist für $u_n, u \in (0, 2\pi)$ aber offensichtlich nicht möglich.
b) Wir definieren differenzierbare Abbildungen $F : Z(r_1) \to Z(r_2), G : Z(r_2) \to Z(r_1)$ durch $F(x, y, z) = \left(x\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}, y\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}, z \right)$ und $G(x, y, z) = \left(x\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}, y\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}, z \right)$. Es ist $FG = id, GF = id$.

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie, daß

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, z = 0 \right\}$$

eine reguläre Fläche ist.
b) Zeigen Sie, daß

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0 \right\}$$

keine reguläre Fläche ist.

Lösung: a) trivial.
b) Wäre S eine reguläre Fläche, dann gäbe es insbesondere lokale Koordinaten um $(1, 0, 0)$. (Man kann auch andere Punkte mit $x^2 + y^2 = 1$ nehmen.)
Das heisst, es gäbe eine offene Umgebung V von $(1, 0, 0)$ sowie einen Homöomorphismus $\phi : U \to V \cap S$ von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$.

Weil ϕ surjektiv ist, gibt es (u_0, v_0) mit $\phi(u_0, v_0) = (1, 0, 0)$.
Das Bild von ϕ wäre in S und insbesondere in $\mathbb{R}^2$ enthalten. Also wäre das Bild von $T_{(u_0,v_0)}\phi$ in $\mathbb{R}^2$ enthalten. $T_{(u_0,v_0)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist injektiv (wegen der Regularität), also auch surjektiv. Insbesondere ist $\frac{\partial}{\partial x} \in Bild\left(T_{(u_0,v_0)}S\right)$. Weil die x-Koordinate von $\phi(u_0, v_0)$ gleich 1 und die x-Koordinate von $\phi(u, v)$ kleiner als 1 für $(u, v) \neq (u_0, v_0)$ ist, gilt aber, dass die $\frac{\partial}{\partial x}$-Koordinate von $T\phi_{(u_0,v_0)}(a, b)$ kleiner als 0 ist für alle $(a, b) \in T_{(u_0,v_0)}S$, im Widerspruch zur Surjektivität von $T\phi_{(u_0,v_0)}$.

Aufgabe 3.

Sei $\alpha(t) := (\alpha_1(t), \alpha_2(t)), t \in \mathbb{R}$, eine reguläre ebene Kurve mit $\alpha_2(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei

$$S_\alpha := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1(t), y^2 + z^2 = \alpha_2(t)^2 \text{ für ein } t \in \mathbb{R}\right\}$$

die zu α gehörende Rotationsfläche. Zeigen Sie, daß S_α eine reguläre Fläche ist.

Lösung: α ist regulär, also ist $\alpha' \neq 0$ und es gibt eine Überdeckung $\mathbb{R} = \cup W_i$, so daß$\alpha\mid_{W_i}$ ein Homöomorphismus ist. Es sei

$$S_{1i} = \{(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\cos v, \alpha_2(t)\sin v) : t \in W_i, v \in (0, 2\pi)\}$$

und

$$S_{2i} = \{(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\cos v, \alpha_2(t)\sin v) : t \in W_i, v \in (\pi, 3\pi)\}.$$

Sei $U = \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$. Wir definieren Parametrisierungen $\phi_j : U \to S_j$ durch

$$\phi_{1i}(u, v) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u)\cos v, \alpha_2(u)\sin v)$$

und

$$\phi_{2i}(u, v) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u)\cos(v + \pi), \alpha_2(u)\sin(v + \pi)).$$

ϕ_{1i} ist differenzierbar, weil α differenzierbar ist. Die 2x2-Minoren von $D\phi_{1i}$ sind

$$-\alpha_1'\alpha_2\cos v, \alpha_1'\alpha_2\sin v, \alpha_2'\alpha_2.$$

Wir wissen, daß$\alpha_2 > 0$ und dass (wegen der Regularität von α) entweder α_1' oder α_2' nicht Null ist (in jedem Punkt). Also können in keinem Punkt alle Minoren verschwinden. $T\phi_{1i}$ ist also überall injektiv. Ähnlich sieht man Injektivität von $T\phi_{2i}$.
Es bleibt zu zeigen, dass ϕ_{1i} bzw. ϕ_{2i} Homöomorphismen sind. Dies erhält man mit fast demselben Beweis wie in Aufgabe 1a: Sei $(x, y, z) \in S_\alpha$. Dann existiert ein u mit $x = \alpha_1(u)$ und $y^2 + z^2 = \alpha_2(u)^2$. (Für mindestens ein i ist $u \in W_i$.) Aus der zweiten Bedingung folgt, dass es ein v mit $y = \alpha_2(u)\cos v$ und $z = \alpha_2(u)\sin v$ gibt. Wäre $v = 0$, so wäre $z = 0$. Also ist ϕ_{1i} surjektiv bereits auf $W_i \to (0, 2\pi)$. Weil $(u, v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ aus den beiden Bedingungen eindeutig bestimmt ist, ist ϕ_{1i} auch injektiv. Wir müssen noch zeigen, dass die Umkehrabbildung stetig ist, d.h. dass es keine Folge $(u_n, v_n) \not\to (u, v)$ mit $\phi_1(u_n, v_n) \to \phi_1(u, v)$ gibt. Dies folgt aber daraus, daß es keine Folge u_n mit $\alpha(u_n) \to \alpha(u)$ und $u_n \not\to u$ gibt.

Aufgabe 4.

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit $(0, 0, 0) \in S$ und $z > 0$ für alle $(x, y, z) \in S - \{(0, 0, 0)\}$. Zeigen Sie:

$$T_{(0,0,0)}S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\right\}.$$

Lösung: Sei $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ eine Kurve mit $\alpha(0) = (0, 0, 0)$. Dann ist die z-Koordinate von α nie negativ, woraus $\frac{\partial\alpha}{\partial z} \geq 0$ folgt. Weil dies für jede solche Kurve gilt, muss der Tangentialraum an $(0, 0, 0)$ also in dem Halbraum $\{(x, y, z) : z \geq 0\}$ enthalten sein. Weil der Tangentialraum ein 2-dimensionaler linearer Raum ist (mit einem vektor v also immer auch $-v$ enthält), muss dann aber $T_{(0,0,0)}S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\right\}$ sein.