Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 4 - Lösungen

Aufgabe 1.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Scheitelpunkte der Ellipse $\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)$.

Lösung: Mit der Formel von Blatt 3, Aufgabe 3, erhält man

$$k(t) = \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)}.$$

Die Ableitung ist

$$k'(t) = -\frac{3}{2}\frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{5}{2}}} 2\left(a^2 - b^2\right)\sin t\cos t.$$

Für $a = b, a = -b, a = 0$ oder $b = 0$ ist die Kurve ein Kreis bzw. eine Gerade und jeder Punkt ist ein Scheitelpunkt. Sei nun $ab\left(a^2 - b^2\right) \neq 0$. Die Nullstellen von k' sind also genau $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Die Scheitelpunkte sind $(a,0), (0,b), (-a,0), (0,-b)$.

Aufgabe 2.

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve und $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ihre Evolute (Blatt 3, Aufgabe 2). Zeigen Sie, daß für alle $t \in \mathbb{R}$ die Tangente an α in $\alpha(t)$ und die Tangente an β in $\beta(t)$ senkrecht aufeinander stehen.

Lösung: Wir können annehmen, daß α nach Bogenlänge parametrisiert ist, weil Reparametrisierung die Richtung der Tangente nicht ändert. Ausserdem können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\{\alpha', \alpha''\}$ positiv orientiert ist, sonst machen wir d ie Reparametrisierung $t \to -t$.

Aus $\beta = \alpha + \frac{1}{k^2}\alpha''$ folgt

$$\beta' = \alpha' + \frac{\alpha''' k^2 - 2kk'\alpha''}{k^4}.$$

Weil $<\alpha', \alpha'>= 1$ und $<\alpha', \alpha''>= 0$ ist, folgt daraus

$$<\alpha', \beta'>= 1 + \frac{1}{k^2} <\alpha', \alpha'''> .$$

Wegen $0 =<\alpha', \alpha''>$ ist aber auch

$$0 =<\alpha', \alpha''>' =<\alpha', \alpha'''> + <\alpha'', \alpha''> =<\alpha', \alpha'''> + k^2,$$

also $<\alpha', \alpha'''>= -k^2$ und damit $<\alpha', \beta'>= 0$. Die Tangenten schneiden sich a lso senkrecht.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$, $f(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und $f'(0) = 0$. Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die durch $\alpha(t) = (t, f(t))$ gegebene reguläre, ebene Kurve. Zeigen Sie, daß die Krümmung in $t = 0$ wie folgt berechnet werden kann:

$$k(0) = \lim_{t\to 0}\frac{2f(t)}{t^2}.$$

Lösung: Nach Blatt 3, Aufgabe 3, ist

$$k(t) = \frac{f''}{(1 + f')^{\frac{3}{2}}} = f''.$$

Wegen $f'(0)$ folgt mit der L'Hospitalschen Regel $\lim_{t\to 0} \frac{2f(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(t)}{t} = \lim_{t\to 0} f''(t) = f''(0)$.

Aufgabe 4.

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine durch $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ gegebene reguläre, ebene Kurve. Sei

$$r := \sup \left\{ x(t)^2 + y(t)^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\} < \infty.$$

Zeigen Sie, für $t \in \mathbb{R}$:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = r \Longrightarrow \mid k(t) \mid \geq \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Lösung: Sei K der Kreis um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{r}$. Nach Annahme liegt das Bild von α in der abgeschlossenen Kreisscheibe und berührt den Kreis in $(x(t), y(t))$. Nach Verschiebung und Drehung können wir o.B.d.A. annehmen, dass der Kreis durch die Gleichung $x^2 + (y - \sqrt{r})^2 = r$ gegeben und der Berührpunkt $(x(t), y(t)) = (0,0)$ ist. O.B.d.A. ist $t = 0$. Es ist $y'(0) = 0$, also $x'(0) \neq 0$. Nach Reparametrisierung können wir annehemen, daß (zumindest in der Nähe von $t = 0$) $x(t) = t$ ist. Wir sind also in der Situation von Aufgabe 3. Weil die Kurve in der Kreisfläche liegt, gilt

$$y(t) \geq \sqrt{r} - \sqrt{r - x^2} = \sqrt{r} - \sqrt{r - t^2}.$$

Damit folgt aus Aufgabe 3

$$k(0) \geq \lim_{t\to 0} \frac{2\sqrt{r} - 2\sqrt{r - t^2}}{t^2} = \frac{d^2}{dt^2} |_{t=0} \sqrt{r} - \sqrt{r - t^2} = \frac{d}{dt} |_{t=0} \frac{t}{\sqrt{r - t^2}} = \frac{r - 2t^2}{(r - t^2)^{\frac{3}{2}}} |_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{r}}.$$