Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 3 - Lösungen

Aufgabe 1.

Für eine reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte, geschlossene Kurve $\alpha : [0,l] \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(0) = \alpha(l)$ definiert man die Rotationszahl I als

$$I := \frac{1}{2\pi} \int_0^l k(t)\, dt.$$

Berechnen Sie die Rotationszahl für

$$a) \quad \alpha(t) := (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t)),$$

$$b) \quad \alpha(t) := \left\{ \begin{array}{cc} (-1+\cos(4\pi t), \sin(4\pi t)) & t \le \frac{1}{2} \\ (1-\cos(4\pi t - 1), \sin(4\pi t - 1)) & t \ge \frac{1}{2} \end{array} \right\}.$$

Lösung: a) Um die Krümmung zu berechnen, müssen wir α zunächst nach Bogenlänge parametrisieren. Es ist $s(t) = \int_0^t \mid \alpha'(u) \mid du = \int_0^t 4\pi du = 4\pi t$, also $t(s) = \frac{1}{4\pi} s$. Damit ist

$$\beta(s) = (\cos s, \sin s), 0 \le s \le 4\pi$$

die Reparametrisierung von α nach Bogenlänge. Wegen $\beta''(s) = (-\cos s, -\sin s)$ folgt $k(s) = \| \beta''(s) \| = 1$, also $I = 2$.
b) Ähnlich wie in a) berechnet man $k(s) = 1$ für $s \le 2\pi$ und $k(s) = -1$ für $s \ge 2\pi$, also $I = 0$.

Aufgabe 2.

Es sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve, die $k(t) \ne 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Dann definiert man die **Evolute** $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\beta(t) := \left\{ \begin{array}{ll} \alpha(t) + \frac{1}{k(t)^2} \alpha''(t) & \textit{wenn } \{\alpha'(t), \alpha''(t)\} \textit{ positiv orientiert} \\ \alpha(t) - \frac{1}{k(t)^2} \alpha''(t) & \textit{wenn } \{\alpha'(t), \alpha''(t)\} \textit{ negativ orientiert} \end{array} \right\}.$$

Berechnen Sie die Evolute für
a) den Kreis $\alpha(t) := (\cos t, \sin t)$,
b) die Ellipse $\alpha(t) := (2\cos t, \sin t)$,
c) die logarithmische Spirale $\alpha(t) := (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$.

Lösung: a) α ist bereits nach Bogenlänge parametrisiert. $\alpha''(t) = -\alpha(t)$ erhält man aus $\alpha'(t)$ durch Drehung um $\frac{\pi}{2}$, also ist $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ positiv orientiert. Wegen $k(t) = 1$ folgt $\beta(t) = (0,0)$ konstant.
b) Wie in a) erhält man wieder $\alpha''(t) = -\alpha(t)$, also ist $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ positiv orientiert. Um die Krümmung zu berechnen, wenden wir Aufgabe 3 an, und erhalten $k(t) = \frac{2}{(1+3\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}$. Also

$$\beta(t) = \left(2\cos t \left(1 - \frac{\left(1+3\sin^2 t\right)^3}{4} \right), \sin t \left(1 - \frac{\left(1+3\sin^2 t\right)^3}{4} \right) \right).$$

c) Es ist $\alpha'(t) = (e^{-t}(-\cos t - \sin t), e^{-t}(\cos t - \sin t))$ und $\alpha''(t) = (2e^{-t}\sin t, -2e^{-t}\cos t)$. Damit ist $det(\alpha', \alpha'') = 2e^{-2t} > 0$, also ist $\{\alpha', \alpha''\}$ zu allen Zeiten positiv orientiert.
Die Krümmung berechnen wir mit Aufgabe 3: es ist $\| \alpha'(t) \|^2 = 2e^{-2t}$ und $< \alpha''(t), J\alpha'(t) >= 2e^{-2t}$, woraus $k = \frac{1}{\sqrt{2}} e^t$ folgt.
Die Evolute ist also $\beta(t) = \left(e^{-t}\cos t + 4e^{-3t}\sin t, e^{-t}\sin t - 4e^{-3t}\cos t\right)$.

Aufgabe 3.

Es sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine durch $\alpha(t) := (x(t), y(t))$ gegebene reguläre, **ebene**, nicht notwendig nach Bogenlänge parametrisierte, Kurve. Zeigen Sie, dass sich die Krümmung von α mittels der beiden folgenden Formeln berechnen läßt:

$$k(t) = \frac{< \alpha''(t), J\alpha'(t) >}{\| \alpha'(t) \|^3} = \frac{y'(t)\, x''(t) - x'(t)\, y''(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Lösung: Wir nehmen zunächst an, daß α nach Bogenlänge parametrisiert, also $\| \alpha' \| \equiv 1$ ist. Dann ist $< \alpha', \alpha'' >= \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \alpha' \| = 0$, also α' senkrecht auf α''. Falls $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ positiv orientiert ist, folgt $\frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = J\alpha'$ wegen $\| J\alpha' \| = \| \alpha' \| = 1$. Andernfalls ist $\frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = -J\alpha'$. In jedem Fall folgt $J\alpha' = \frac{\alpha''}{k}$, also $< J\alpha', \alpha'' >= \frac{1}{k} \| \alpha'' \|^2 = k$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass der Ausdruck $\frac{<\alpha''(t), J\alpha'(t)>}{\|\alpha'(t)\|^3}$ bei Reparametrisierung konstant bleibt. (Dann können wir für beliebige Kurven α den obigen Beweis für die nach Bogenlänge reparametrisierte Kurve verwenden.)
Sei also $s \to t(s)$ die Reparametrisierung und $\beta(s) = \alpha(t(s))$ die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann ist

$$\beta'(s) = \alpha'(t)\, t'(s),$$

$$\beta''(s) = \alpha''(t)\, (t')^2 + \alpha'(t)\, t''.$$

Also

$$< \beta'', J\beta' >=< \alpha''(t')^2 + \alpha' t'', J\alpha' t' >= (t')^3 < \alpha'', J\alpha' >$$

(der zweite Summand verschwindet, weil $J\alpha'$ auf α' senkrecht steht). Mit $\| \beta' \|^3 = (t')^3 \| \alpha' \|^3$ erhalten wir also $k = \frac{<\beta'', J\beta'>}{\|\beta'\|^3} = \frac{<\alpha'', J\alpha'>}{\|\alpha'\|^3}$.

Schliesslich müssen wir noch zeigen, dass $k > 0$ gdw. $\{\alpha', \alpha''\}$ positiv orientiert. Letzteres ist der Fall, wenn der Winkel zwischen α' und α'' in $[0, \pi]$ liegt. Dann liegt aber der Winkel zwischen $J\alpha'$ und α'' in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, das Skalarprodukt ist also ≥ 0.

Aufgabe 4.

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{R}^3$.
a) Zeigen Sie, dass für jede Kurve $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(a) = p, \alpha(b) = q$, und für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, gilt:

$$< q - p, v >= \int_a^b < \alpha'(t), v > dt \leq | v | \int_a^b | \alpha'(t) | \, dt.$$

b) Zeigen Sie, dass $\alpha(t) := \frac{q-p}{b-a} t + \frac{pb-qa}{b-a}$ die Kurve kürzester Länge mit $\alpha(a) = p$ und $\alpha(b) = q$ ist.
(Hinweis: um die Minimalität zu zeigen, wenden Sie a) mit $v = \frac{q-p}{|q-p|}$ an.)

Lösung: a) Es ist $< \alpha'(t), v >= \frac{d}{dt} < \alpha(t), v >$, weil v nicht von t abhängt (und die Ableitung linear ist). Daraus folgt $\int_a^b < \alpha'(t), v > dt =< \alpha(b), v > - < \alpha(a), v >=< q-p, v >$, also die erste Gleichung. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung hat man $< \alpha'(t), v > \leq | \alpha'(t) || v |$, woraus die zweite Ungleichung folgt.

b) Wir setzen $v = \frac{q-p}{|q-p|}$ in a) ein und erhalten, wegen $< q-p, v >= | q-p |$ und $| v | = 1$: $| q-p | \leq \int_a^b | \alpha' | \, dt$. Das heisst, jede Kurve hat Länge $\geq | q-p |$. Damit ist die gegebene gerade Strecke, deren Länge genau $| q-p |$ ist, also die Kurve kürzester Länge.