Math. Institut der Univ. Siegen, Prof. Dr. U. Koschorke, Dr. T. Kuessner 19. Oktober 2004

Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 2 - Lösungen

Aufgabe 1.

Wir betrachten die Vektoren $v_1 := (1, 3, 5)$ und $v_2 := (2, 6, 7)$ im $\mathbb{R}^3$.
Geben Sie jeweils einen Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$ an, für den
a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine positive Basis ist,
b) $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine negative Basis ist.

Lösung: $v_1, v_2, v_1 \times v_2$ ist eine positive Basis, $v_1, v_2, -v_1 \times v_2$ ist eine negative Basis.

Aufgabe 2.

Die logarithmische Spirale $\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\alpha(t) := \left(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t\right).$$

a) Für jedes $t \in (0, \infty]$ sei $r(t) = d(0, \alpha(t))$, und $\phi(t)$ der Winkel zwischen der x-Achse und der Gerade durch $(0, 0)$ und $\alpha(t)$. Zeigen Sie:

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$$

und

$$\phi(t) \equiv t \; mod \; 2\pi.$$

b) Zeigen Sie:

$$\int_0^\infty \mid \alpha'(t) \mid dt = \sqrt{2}.$$

Die logarithmische Spirale hat also endliche Länge.

Lösung: a) Es ist $r(t) = e^{-t}$, woraus $\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$ folgt. Weiter ist $\cos\phi(t) = \cos t$ und $\sin\phi(t) = \sin t$, woraus $\phi(t) = t + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ folgt.
b) Es ist $\alpha'(t) = (-e^{-t}(\cos t + \sin t), e^{-t}(\cos t - \sin t))$, also $\| \alpha'(t) \|^2 = e^{-2t}\left((\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2\right) = e^{-2t}\left(2\cos^2 t + 2\sin^2 t\right) = 2e^{-2t}$. Damit ist $\int_0^\infty \mid \alpha'(t) \mid dt = \int_0^\infty \sqrt{2}e^{-t}dt = \sqrt{2}$.

Aufgabe 3.

Seien u, v und w Vektoren im $\mathbb{R}^3$.
Beweisen Sie:

$$(u \times v) \times w = < u, w > v - < v, w > u$$

und

$$(u \times v) \times w - u \times (v \times w) = < u, v > w - < v, w > u.$$

Folgern Sie, dass das Kreuzprodukt nicht assoziativ ist.

Lösung: Wegen der Bilinearität des Kreuzprodukts, genügt es, die Gleichheiten für Basisvektoren nachzuprüfen. Wenn man drei verschiedene oder drei gleiche Vektoren einsetzt, sind beide Seiten Null. Wenn man e_1, e_1, e_2 einsetzt, sind ebenfalls beide seiten Null. Wenn man e_1, e_2, e_2 einsetzt, erhält man auf beiden Seiten der ersten Gleichung $-e_1$. Analog für zyklische Vertauschungen. Das zeigt die erste Gleichung.

Die zweite Gleichung folgt aus der ersten:

$$(u \times v) \times w - u \times (v \times w) =$$

$$(u \times v) \times w + (v \times w) \times u < u, w > v - < v, w > u + < v, u > w - < w, u > v = < u, v > w - < v, w > u.$$

Wäre das Kreuzprodukt assoziativ, so müsste auch die rechte Seite der zweiten Gleichung immer verschwinden. Durch Einsetzen von z.B. $u = v = e_1, w = e_2$ sieht man, dass das nicht der Fall ist.

Aufgabe 4.

Die Helix $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\alpha(t) := (a \cos t, a \sin t, bt).$$

a) Geben Sie die Parametrisierung der Helix nach Bogenlänge an.
b) Bestimmen Sie das Frenet-3-Bein in jedem Punkt der Helix.
c) Berechnen Sie Krümmung, Torsion und Krümmungsradius in jedem Punkt der Helix.

Lösung:
a) Es ist

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b),$$

also $\mid \alpha'(t) \mid^2 = a^2 + b^2$. Wenn wir $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ setzen, dann ist also

$$\beta(t) := \left(a \cos \frac{t}{c}, a \sin \frac{t}{c}, b \frac{t}{c} \right)$$

die Parametrisierung von α nach Bogenlänge.
b),c) Es ist

$$\beta'(t) = \left(-\frac{a}{c} \sin \frac{t}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{t}{c}, \frac{b}{c} \right),$$

$$\beta''(t) = \left(-\frac{a}{c^2} \cos \frac{t}{c}, -\frac{a}{c^2} \sin \frac{t}{c}, 0 \right).$$

Damit erhalten wir zunächst die Krümmung

$$\kappa(t) = \| \beta''(t) \| = \frac{\mid a \mid}{a^2 + b^2}$$

und den Krümmungsradius $\frac{1}{\kappa(t)} = \frac{a^2+b^2}{a}$, sowie den Normalenvektor

$$n(t) = sign(a) \left(-\cos \frac{t}{c}, -\sin \frac{t}{c}, 0 \right)$$

und den Binormalenvektor

$$b(t) = \beta'(t) \times n(t) = sign(a) \left(\frac{b}{c} \sin \frac{t}{c}, -\frac{b}{c} \cos \frac{t}{c}, \frac{a}{c} \right),$$

woraus sich $b'(t) = \left(\frac{b}{c^2} \cos \frac{t}{c}, \frac{b}{c^2} \sin \frac{t}{c}, 0 \right)$ und damit die Torsion

$$\tau(t) = -\frac{b}{c^2}$$

berechnet.