Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 13 - Lösungen

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, daß es auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ kein (nichttriviales) Vektorfeld gibt, daß parallel entlang jeder Geodäten ist.

Lösung: Man betrachte das geodätische Dreieck mit den Ecken $(0,0,1), (0,1,0), (0,0,1)$. Wenn ein Vektorfeld parallel entlang der drei Dreiecksseiten ist, muß man also nach Parallelverschiebung entlang des Dreiecks wieder denselben Vektor erhalten. Das ist aber nicht der Fall.
Wenn wir zum Beispiel in $(0,0,1)$ mit dem Vektor e_1 starten, erhalten wir nach Verschiebung entlang des Grosskreises nach $(0,1,0)$ ebenfalls e_1, wenn wir weiter entlang eines Grosskreises nach $(1,0,0)$ verschieben, erhalten wir $-e_2$, und wenn wir dies weiter entlang eines Grosskreises nach $(0,0,1)$ verschieben, erhalten wir $-e_2$.
Analog, wenn wir mit e_2 starten, erhalten wir e_1.
Es folgt, daß für $a, b \in \mathbb{R}$ der Vektor $ae_1 + be_2$ nach $-ae_2 + be_1$ abgebildet wird.
Wenn man also ein paralleles Vektorfeld v mit $v(0,0,1) = ae_1 + be_2$ hat, so gilt $ae_1 + be_2 = -ae_2 + be_1$. Daraus folgt aber $a = b$ und $a = -b$, also $a = b = 0$.
Ein paralleles Vektorfeld hat in jedem Punkt die selbe Länge. Wenn es also in einem Punkt Null ist, muss es in jedem Punkt Null sein, ist also trivial.

Aufgabe 2.

Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ die durch die Parametrisierungen $\phi_1(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \log u)$, $\phi_2(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ gegebenen regulären Flächen. Zeigen Sie, daß $\phi_2^{-1}\phi_1$ keine lokale Isometrie ist, daß aber für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ die Gauß-Krümmung von S_1 in $\phi_1(u,v)$ mit der Gauß-Krümmung von S_2 in $\phi_2(u,v)$ übereinstimmt.

Lösung: Wir betrachten zunächst S_1. Hier berechnet man $\phi_u = \left(\cos v, \sin v, \frac{1}{u}\right), \phi_v = (-u\sin v, u\cos v, 0), N = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(-\cos v, -\sin v, u), \phi_{uu} = \left(0, 0, \frac{-1}{u^2}\right), \phi_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \phi_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$, also

$$E = 1 + \frac{1}{u^2}, F = 0, G = u^2, e = \frac{-1}{u\sqrt{1+u^2}}, f = 0, g = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Für S_2 berechnet man $\phi_u = (\cos v, \sin v, 0), \phi_v = (-u\sin v, u\cos v, 1), N = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\sin v, -\cos v, u), \phi_{uu} = (0,0,0), \phi_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \phi_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$, also

$$E = 1, F = 0, G = u^2 + 1, e = 0, f = \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}}, g = 0.$$

Obwohl die ersten Fundamentalformen der beiden Flächen nicht übereinstimmen, erhalten wir also in beiden Fällen die Gausskrümmung $K = \frac{-1}{(1+u^2)^2}$.

Aufgabe 3.

Sei $\mathbb{H} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$. Wir definieren differenzierbare Abbildungen $E, F, G : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ durch

$$E(x,y) = \frac{1}{y^2}, F(x,y) = 0, G(x,y) = \frac{1}{y^2}.$$

a) Zeigen Sie: das Differentialgleichungssystem

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_x$$

$$\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_x - \frac{1}{2} E_y$$

$$\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} E_y$$

$$\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_x$$

$$\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_y - \frac{1}{2} G_x$$

$$\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_y$$

hat die eindeutige Lösung $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 \equiv 0$, $\Gamma_{11}^2(x,y) = \frac{1}{y}$, und $\Gamma_{12}^1(x,y) = \Gamma_{22}^2(x,y) = -\frac{1}{y}$.
b) Berechnen Sie die 'Gauß-Krümmung' $K = \frac{-1}{E}\left\{\left(\Gamma_{12}^2\right)_x - \left(\Gamma_{11}^2\right)_y + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2\right\}$.

Lösung: Aus der 1.Gleichung hat man $\Gamma_{11}^1 = 0$, aus der 4.Gleichung folgt $\Gamma_{12}^2 = 0$, und aus der 5.Gleichung folgt $\Gamma_{22}^1 = 0$.
Aus der 2.Gleichung hat man $\Gamma_{11}^2 \frac{1}{y^2} = -\frac{1}{2}\frac{-2}{y^3}$, also $\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}$. Analog berechnet man $\Gamma_{12}^1(x,y) = \Gamma_{22}^2(x,y) = -\frac{1}{y}$ aus der 3. bzw. 6.Gleichung.
Durch Einsetzen erhält man dann $K \equiv -1$.

Aufgabe 4.

Seien $E, F, G : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 3.
Bestimmen Sie alle Kurven $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, die Lösungen der Geodäten-Gleichung

$$x'' + \Gamma_{11}^1 (x')^2 + 2\Gamma_{12}^1 x'y' + \Gamma_{22}^1 (y')^2 = 0,$$

$$y'' + \Gamma_{11}^2 (x')^2 + 2\Gamma_{12}^2 x'y' + \Gamma_{22}^2 (y')^2 = 0,$$

mit den Anfangsbedingungen
a) $\gamma(0) = (0,1), \gamma'(0) = (0,1)$
oder
b) $\gamma(0) = (0,1), \gamma'(0) = (1,0)$ sind.

Lösung: Mit Aufgabe 3 erhalten wir die Differentialgleichungen

$$x'' - \frac{2}{y} x'y' = 0,$$

$$y'' - \frac{1}{y}(y')^2 + \frac{1}{y}(x')^2 = 0.$$

a) Wenn man $x(t) \equiv 0$ ansetzt, erhält man in der 2.Gleichung: $y'' = \frac{(y')^2}{y}$. Diese Gleichung wird gelöst von $y(t) = e^{at+b}$. Wegen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ muß $a = 1, b = 0$ sein. Aus dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen folgt, daß

$$\gamma(t) = \left(0, e^t\right)$$

die einzige Lösung ist.

b) In einer Umgebung von $t = 0$ haben wir $x' \neq 0$. Wir können also durch x' dividieren und erhalten

$$\frac{x''}{x'} = 2\frac{y'}{y},$$

das heißt

$$(\ln x')' = \left(\ln\left(y^2\right)\right)',$$

woraus $\ln x' = \ln\left(y^2\right) + c$ bzw. $x' = cy^2$ folgt. Aus $x'(0) = 1$ und $y(0) = 1$ folgt $c = 1$, also

$$x' = y^2.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung gibt

$$y'' - \frac{(y')^2}{y} + y^3 = 0.$$

In einer Umgebung von $t = 0$ ist $y \neq 0$, wir können also durch y dividieren und erhalten (nachdem wir die ersten beiden Summanden auf den Hauptnenner y^2 gebracht haben)

$$\frac{y''y - (y')^2}{y^2} + y^2 = 0,$$

das heißt

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = -y^2 = -x'.$$

Wegen $\frac{y'}{y}(0) = 0$ und $x'(0) = 0$ folgt daraus

$$\frac{y'}{y} = -x.$$

Wenn wir nun wieder die erste Gleichung einsetzen, erhalten wir $\frac{x''}{x'} = -2x$ bzw.

$$x'' + 2x'x = 0.$$

Wegen $2x'x = \left(x^2\right)'$ folgt $x' + x^2 = C$. Aus den Anfangsbedingungen erhalten wir $C = 1$, also

$$x' = 1 - x^2.$$

Diese Gleichung kann man durch Separation der Variablen lösen und erhält (wegen $\int \frac{1}{1-x^2} = artanh\ x$)

$$x(t) = \tanh t, y(t) = \frac{1}{\cosh t}.$$

(Wegen $\tanh^2 t + \frac{1}{\cosh^2 t} = \frac{\sinh^2 t+1}{\cosh^2 t} = 1$ ist γ also eine Umparametrisierung des Einheitskreises.)