Math. Institut der Univ. Siegen, Prof. Dr. U. Koschorke, Dr. T. Kuessner 11. Januar 2005

Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 12 - Lösungen

Aufgabe 1.

Sei S eine reguläre Fläche.
a) Zeigen Sie: wenn $f_1 : S \to S$ und $f_2 : S \to S$ Isometrien sind, dann ist auch $f_1 f_2$ eine Isometrie.
b) Zeigen Sie, daß $Isom(S)$, die Menge aller Isometrien von S mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung, eine Gruppe ist.

Lösung: a) Weil f_1, f_2 Diffeomorphismen sind, ist auch $f_1 f_2$ ein Diffeomorphismus.
Es ist $< T(f_1 f_2) v_1, T(f_1 f_2) v_2 > = < Tf_1 Tf_2 v_1, Tf_1 Tf_2 v_2 > = < Tf_2 v_1, Tf_2 v_2 > = < v_1, v_2 >$.
b) Assoziativität gilt für die Verknüpfung beliebiger Abbildungen. Einselement ist die Identität. Existenz des Inversen: Sei f Isometrie. Weil f Diffeomorphismus ist, existiert inverser Diffeomorphismus f^{-1}. f^{-1} ist Isometrie wegen $< T(f^{-1}) v, T(f^{-1}) w > = < TfT(f^{-1}) v, TfT(f^{-1}) w > = < v, w >$.

Aufgabe 2.

Sei $\mathbb{R}^2 \triangleleft O(2) := \{(A, v) : A \in O(2), v \in \mathbb{R}^2\}$ mit der Verknüpfung

$$(A_1, v_1)(A_2, v_2) := \left(A_1 A_2, A_2^{-1} v_1 + v_2\right).$$

a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^2 \triangleleft O(2)$ eine Gruppe ist.
b) Für $v \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $t_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch $t_v(x) := x + v$ für $x \in \mathbb{R}^2$ definierte Abbildung. Zeigen Sie, daß t_v eine Isometrie ist.
c) Für $A \in O(2)$ bezeichne $r_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch $r_A(x) := Ax$ für $x \in \mathbb{R}^2$ definierte Abbildung. Zeigen Sie, daß r_A eine Isometrie ist.
d) Zeigen Sie, daß die durch

$$\phi(A, v) := r_A t_v$$

definierte Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^2 \triangleleft O(2) \to Isom\left(\mathbb{R}^2\right)$$

ein Isomorphismus ist.

Lösung:
a) Assoziativität: Es ist

$$((A_1, v_1)(A_2, v_2))(A_3, v_3) = \left(A_1 A_2, A_2^{-1} v_1 + v_2\right)(A_3, v_3) = \left(A_1 A_2 A_3, A_3^{-1}\left(A_2^{-1} v_1 + v_2\right) + v_3\right)$$

und

$$(A_1, v_1)((A_2, v_2)(A_3, v_3)) = (A_1, v_1)\left(A_2 A_3, A_3^{-1} v_2 + v_3\right) = \left(A_1 A_2 A_3, (A_2 A_3)^{-1} v_1 + A_3^{-1} v_2 + v_3\right),$$

woraus Assoziativität folgt.
Einselement ist $(I, 0)$, wobei I die Identitäts-Matrix bezeichnet.
Inverses zu (A, v) ist $\left(A^{-1}, -Av\right)$. Tatsächlich gilt

$$(A, v)\left(A^{-1}, -Av\right) = (I, Av - Av) = (I, 0)$$

und

$$\left(A^{-1}, -Av\right)(A, v) = \left(I, A^{-1}(-Av) + v\right) = (I, 0).$$

b) ist klar und c) folgt aus der Definition von $O(2)$.
d) Für die Abbildung $L := r_A t_v r_{A^{-1}}$ gilt $L(x) = A\left(v + A^{-1}x\right) = Av + x$, d.h. $r_A t_v r_{A^{-1}} = t_{Av}$. Damit ist

$$\phi(A_1, v_1)\,\phi(A_2, v_2) = r_{A_1}\left(t_{v_1} r_{A_2}\right) t_{v_2} = r_{A_1}\left(r_{A_2} t_{A_2^{-1} v_1}\right) t_{v_2}$$

$$= r_{A_1 A_2} t_{A_2^{-1} v_1 + v_2} = \phi\left(A_1 A_2, A_2^{-1} v_1 + v_2\right) = \phi\left((A_1, v_1)(A_2, v_2)\right),$$

ϕ ist also ein Homomorphismus.
Injektivität: Sei $r_A t_v = id$. Wegen $r_A t_v(0) = Av$ folgt $Av = 0$, wegen Invertierbarkeit von A also $v = 0$. Aus $r_A = id$ folgt dann $A = I$.

<u>Aufgabe 3.</u>

Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine *lineare* Abbildung mit $det(A) > 0$.
Zeigen Sie, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind.
(i) A ist konform.
(ii) Es gibt eine orthogonale Abbildung $B \in SO(2)$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $A = \lambda^2 B$.
(iii) Es gibt reelle Zahlen a, b mit $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
(iv) Nach der kanonischen Identifizierung $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ entspricht A der Multiplikation mit einer komplexen Zahl z.

Lösung: Zunächst bemerken wir, daß für eine lineare Abbildung A in jedem $p \in \mathbb{R}^2$ gilt: $T_p A = A$.

(i)$\Leftrightarrow$(ii): Wenn A konform ist, gilt $< Av, Aw >= \lambda^2 < v, w >$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$. $B = \frac{1}{\lambda} A$ erfüllt dann $< Bv, Bw >=< v, w >$ für alle v, w, ist also eine orthogonale lineare Abbildung. Umgekehrt folgt aus $A = \lambda B$, daß $< Av, Aw >= \lambda^2 < Bv, Bw >= \lambda^2 < v, w >$ ist.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii): Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen $v = (a, b)$ und $w = (c, d)$. Es ist

$$< v, w >=< A(1,0), A(0,1) >= \lambda^2 < B(1,0), B(0,1) >= \lambda^2 < (1,0), (0,1) >= 0,$$

und

$$< v, v >=< A(1,0), A(1,0) >= \lambda^2 < B(1,0), B(1,0) >= \lambda^2 < (1,0), (1,0) >= \lambda^2,$$

analog $< w, w >= \lambda^2$.

Aus $0 =< v, w >= ac + bd$ folgt, daß es eine reelle Zahl k mit $d = ka$ und $c = -kb$ gibt. (Falls $a \neq 0$ ist $k = \frac{d}{a}$; falls $a = 0$ ist $b \neq 0$ wegen $det(A) \neq 0$, aus $ac + bd = 0$ folgt also $d = 0$ und wir können $k = -\frac{c}{b}$ nehmen.)

Aus $< v, v >=< w, w >$ folgt aber $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, womit $k = \pm 1$ sein muß.
Für $k = -1$ hätte man $det(A) = -a^2 - b^2 < 0$. Also ist $k = 1$.

Umgekehrt, sei $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, dann setze $\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $B = \frac{1}{\lambda} A$. Man rechnet direkt nach, daß $B \in SO(2)$.

(iii)$\Leftrightarrow$(iv) erhält man mit $z = a + bi$.

Aufgabe 4.

Seien S_1, S_2 reguläre Flächen.
Eine Abbildung $f : S_1 \to S_2$ heißt winkelerhaltend, wenn für alle $p \in S_1, v_1, v_2 \in T_pS_1$ gilt:

$$\angle (v_1, v_2) = \angle (Tf_p (v_1), Tf_p (v_2)),$$

wobei wir jeweils den Winkel in $[0, \pi]$ betrachten.
Zeigen Sie: f ist lokal konform genau dann, wenn es winkelerhaltend ist.

Lösung: Sei f lokal konform. Dann ist für jedes p die lineare Abbildung Tf_p konform, entspricht also nach Aufgabe 3 der Multiplikation mit einer komplexen Zahl $z = re^{i\phi}$. Multiplikation mit $e^{i\phi}$ entspricht einer Drehung, ist also winkelerhaltend. Multiplikation mit r entspricht einer Streckung, ist also ebenfalls winkelerhaltend.
Umgekehrt sei f winkelerhaltend. Nach Definition bedeutet dies, daß Tf_p winkelerhaltend ist, für alle $p \in S$. Wir müssen zeigen, daß (für alle $p \in S$) Tf_p konform ist (dann ist f lokal konform).
Sei $\{b_1, b_2\}$ eine Orthonormalbasis von T_pS. Sei $Tf_p = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis. Weil Tf_p winkelerhaltend ist, stehen $(a, b) = Tf_p (b_1)$ und $(c, d) = Tf_p (b_2)$ senkrecht aufeinander. Daraus folgt, daß es eine reelle Zahl k mit $d = ka$ und $c = -kb$ gibt. (Der Beweis ist wie in Aufgabe 3, beim Schritt (ii)⇒(iii), für $a \neq 0$. Falls $a = 0$, folgt $d = 0$, womit die Aussage ebenfalls stimmt.)
Wir betrachten nun (zum Beispiel) die beiden orthogonalen Vektoren $b_1 + b_2$ und $b_1 - b_2$. Ihre Bilder unter Tf_p müssen wieder orthogonal sein. Es ist

$$Tf_p (b_1 + b_2) = (a - kb, b + ka)$$

und

$$Tf_p (b_1 - b_2) = (a + kb, b - ka),$$

woraus

$$< Tf_p (b_1 + b_2), Tf_p (b_1 - b_2) >=< (a - kb, b + ka), (a + kb, b - ka) >= a^2 - k^2b^2 + b^2 - k^2a^2 = \left(1 - k^2\right)\left(a^2 + b^2\right)$$

folgt. Weil a und b nicht beide Null sein können, folgt $k = \pm 1$.
Falls $k = 1$, erhalten wir mit Aufgabe 3, daß Tf_p konform ist.
Falls $k = -1$, betrachten wir die Matrix $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ Tf_p$. Als Produkt zweier winkelerhaltender Abbildungen, ist sie ebenfalls winkelerhaltend. Nach Aufgabe 3 ist B konform. Also ist A konform.
Damit haben wir gezeigt, daß Tf_p konform ist, d.h. in jedem Punkt p existiert $\lambda (p)$. Wir müssen noch zeigen, daß λ differenzierbar ist.
Dafür genügt es, eine kleine Umgebung von p zu betrachten. Wir wählen etwa eine Umgebung mit einer Parametrisierung ϕ und betrachten z.B. $v = \phi_u$. Dann ist $\lambda (p) = \frac{\|Tf_p(v)\|}{\|v\|}$ in jedem Punkt p. Weil v und (wegen der Differenzierbarkeit von Tf_p) auch $Tf_p (v)$ differenzierbar von v abhängen, folgt Differnzierbarkeit von λ.