Math. Institut der Univ. Siegen, Prof. Dr. U. Koschorke, Dr. T. Kuessner 21.Dezember 2004

Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 11

Aufgabe 1.

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ die Pseudosphäre (Blatt 8, Aufgabe 4), $p \in S$. Bestimmen Sie die Dupin-Indikat rix und die asymptotischen Richtungen in p .

Lösung: Die Dupin-Indikatrix ist $-\frac{1}{\cot u}\xi^2 + \cot u \eta^2 = \pm 1$, die asymptotischen Richtunge haben Anstieg $\pm\frac{1}{\cot u}$.

Aufgabe 2.

Zeigen Sie, daß es auf dem Torus zwei Vektorfelder gibt, die in jedem Punkt linear unabhängig sind.

Lösung: Eine Parametrisierung des Torus war gegeben durch $\phi(u,v) = (\cos u, (\sin u + 2)\cos v, (\sin u + 2)\sin v)$. Weil e_1, e_2 linear unabhängig und $T\phi$ injektiv ist, sind $T\phi(e_1)$ und $T\phi(e_2)$ in jedem Punkt linear unabhängig.

$T\phi(e_1)$ und $T\phi(e_2)$ sind wohldefinierte Vektorfelder auf dem Torus, weil $T\phi_{(u,v)} = T\phi_{(u+2k\pi, v+2l\pi)}$ für $k, l \in \mathbb{Z}$ ist.

(Bemerkung: man kann für keine andere kompakte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ wohldefinierte Vektorfelder ohne Nullstellen finden (erst recht also keine linear unabhängigen Vektorfelder). Der Beweis benutzt, dass für ein Vektorfeld die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) gerade die Eulecharkteristik ist. Der Torus ist die einzige kompakte Fläche mit Eulercharakteristik Null.)

Aufgabe 3.

Sei S eine reguläre Fläche und $h : S \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.
$p \in S$ heißt kritischer Punkt, wenn $T_p h = 0$.
a) Sei $w \in T_p S$ gegeben. Wir definieren

$$Hess_p h(w) := \frac{d^2(h(\alpha(t)))}{dt^2} |_{t=0},$$

wobei $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ eine differenzierbare Kurve mit

$$\alpha(0) = p, \alpha'(0) = w$$

ist. Zeigen Sie: wenn p ein kritischer Punkt von h ist, dann ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Kurve α.
Hinweis: Wählen Sie eine Parametrisierung $\phi : U \to S$. Dann ist $w = a\phi_u + b\phi_v$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$Hess_p h(a\phi_u + b\phi_v) = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(p) + 2ab \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(p) + b^2 \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}(p).$$

Lösung: Es ist $\frac{d}{dt}(h\alpha(t)) = T_{\alpha(t)} h(\alpha'(t))$. Daraus folgt

$$\frac{d^2(h(\alpha(t)))}{dt^2} |_{t=0} = \frac{d}{dt} |_{t=0} \left(T_{\alpha(t)} h(\alpha'(t))\right) = T_p h \frac{d}{dt} |_{t=0} \alpha'(t) + \left(\frac{d}{dt} |_{t=0} T_{\alpha(t)} h\right) \alpha'(0).$$

Weil p ein kritischer Punkt von h ist, ist $T_p h = 0$, also

$$\frac{d^2(h(\alpha(t)))}{dt^2} |_{t=0} = \left(\frac{d}{dt} |_{t=0} T_{\alpha(t)} h\right) \alpha'(0).$$

Es ist

$$T_{\alpha(t)} h = \left(\frac{\partial h}{\partial u}(\alpha(t)), \frac{\partial h}{\partial v}(\alpha(t))\right),$$

woraus mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}T_{\alpha(t)}h = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\alpha_1'(t) + \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}\alpha_2'(t), \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}\alpha_1'(t) + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\alpha_2'(t)\right)$$

folgt. Mit

$$\alpha'(0) = (\alpha_1'(0), \alpha_2'(0)) = a\phi_u + b\phi_v$$

erhalten wir

$$\left(\frac{d}{dt}\mid_{t=0} T_{\alpha(t)}h\right)(\alpha_1'(0), \alpha_2'(0)) = a^2\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(p) + 2ab\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(p) + b^2\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}(p).$$

Aufgabe 4.

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$, und $h : S \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$H(q) := < q - p, N(p) >$$

für $q \in S$, wobei $N(p)$ den Normalenvektor an S in p bezeichnet und $q - p$ sowie das Skalarprodukt jeweils im $\mathbb{R}^3$ zu nehmen sind.
Zeigen Sie:
a) p ist ein kritischer Punkt von h. (Also können wir $Hess_p$ wie in Aufgabe 3 definieren.)
b) Für $w \in T_pS$ ist $Hess_p h(w) = \parallel w \parallel^2 k_n(w)$, wobei $k_n(w)$ die Normalkrümmung in Richtung w bezeichnet.
c) Für alle $v, w \in T_pS$ gilt $H_p(v, w) = II_p(v, w)$.

Lösung: Sei $\phi : U \to S$ eine Parametrisierung einer Umgebung von p. Dann ist

$$h\phi(u, v) = \frac{1}{\parallel \phi_u \times \phi_v \parallel} < \phi(u, v) - p, \phi_u \times \phi_v(p) > .$$

Man beachte, daß $\phi_u \times \phi_v(p)$ konstant ist, weil wir ja immer den Normalenvektor im festen Punkt p nehmen. Deshalb sind die Ableitungen einfach

$$\frac{\partial(h\phi)}{\partial u}\left(\phi^{-1}(p)\right) = < \phi_u, N > = 0, \frac{\partial(h\phi)}{\partial v}\left(\phi^{-1}(p)\right) = < \phi_v, N > = 0,$$

also ist (u, v) ein kritischer Punkt von $h\phi$. Weil $T\phi$ injektiv ist, folgt, daß $p = \phi(u, v)$ ein kritischer Punkt von h ist.

Weil für Einheitsvektoren $II(w) = k_n(w)$ gilt, folgt b) aus c). Wir müssen also c) beweisen.

Wir können annehmen, daß $\phi^{-1}(p) = (0, 0)$ ist. Sei β die u-Achse im $\mathbb{R}^2$ und $\alpha = \phi\beta$. Es ist dann $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = \phi_u$.

Es ist $h\alpha(t) = < \phi(t, 0) - p, N(p) >$, woraus $\frac{d^2}{dt^2}\mid_{t=0} h\alpha(t) = < \phi_{uu}, N > = II(u)$ folgt. Also gilt $Hess_p(\phi_u) = II(u)$. Analog zeigt man $Hess_p(\phi_v) = II(v)$.