Math. Institut der Univ. Siegen, Prof. Dr. U. Koschorke, Dr. T. Kuessner 14. Dezember 2004

Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 10

Aufgabe 1.

Sei S eine Minimalfläche ohne Flachpunkte. Zeigen Sie: für alle $p \in S, v, w \in T_pS$ gilt

$$< T_pN(v), T_pN(w) >= -K(p) < v, w > .$$

Lösung: Sei $p \in S$. Wegen $H(p) = 0$ ist $k_1(p) = -k_2(p)$. Weil p kein Flachpunkt ist, folgt $k_1(p) \neq k_2(p)$. T_pN ist also diagonalisierbar, in einer Orthonormal-Basis $\{b_1, b_2\}$ ist es diagonal mit Einträgen $k_1(p)$ und $-k_1(p)$. Mit $v = v_1b_1 + v_2b_2$ und $w = w_1b_1 + w_2b_2$ folgt

$$< T_pNv, T_pNw >=< k_1v_1b_1 - k_1v_2b_2, k_1w_1b_1 - k_1w_2b_2 >=$$

$$= k_1^2 < v_1b_1 - v_2b_2, w_1b_1 - w_2b_2 >= k_1^2(v_1w_1 + v_2w_2) = k_1^2 < v_1b_1 + v_2b_2, w_1b_1 + w_2b_2 >= -K < v, w > .$$

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie alle, nach Bogenlänge parametrisierten, Kurven $\alpha : \mathbb{R} \to \{(x, y) : y > 0\}$, für die die zugehörige Rotationsfläche S_α konstante Gauß-Krümmung $K \equiv 1$ hat.
Hinweis: alle Lösungen der Differentialgleichung $\frac{d^2x}{dt^2}(t) + x(t) = 0$
sind von der Form $x(t) = a \sin t + b \cos t$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung: Wir können annehmen, daß α nach Bogenlänge parametrisiert ist. Wir betrachten die Parametrisierung von S_α

$$\phi(u, v) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u)\cos v, \alpha_2(u)\sin v).$$

Analog zu Blatt 8, Aufgabe 4, erhält man (unabhängig von v)

$$II_{\phi(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_2'(u)\alpha_1''(u) - \alpha_2''(u)\alpha_1'(u)}{\|\alpha'(u)\|} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2(u)\alpha_1'(u)}{\|\alpha'(u)\|} \end{pmatrix}$$

bzgl. der Basis $\{\phi_u, \phi_v\}$. In der ON-Basis $\left\{\frac{1}{\|\alpha'(u)\|}\phi_u, \frac{1}{\alpha_2(u)}\phi_v\right\}$ (und unter Benutzung von $\| \alpha' \| = 1$) haben wir dann also

$$II_{\phi(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_2'(u)\alpha_1''(u) - \alpha_2''(u)\alpha_1'(u)}{\|\alpha'(u)\|^3} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1'(u)}{\alpha_2(u)\|\alpha'(u)\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2'(u)\alpha_1''(u) - \alpha_2''(u)\alpha_1'(u) & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1'(u)}{\alpha_2(u)} \end{pmatrix}.$$

Wir wissen, daß α'' auf α' senkrecht steht, d.h. $\alpha_1'\alpha_1'' = -\alpha_2'\alpha_2''$. Daraus folgt $\alpha_2'(u)\alpha_1''(u) - \alpha_2''(u)\alpha_1'(u) = \frac{\alpha_1{}'\alpha_1''}{\alpha_2{}'}\alpha_1' + \alpha_1'\alpha_2'' = \frac{\alpha_1''}{\alpha_2'} \| \alpha' \|^2 = \frac{\alpha_1''}{\alpha_2'} = -\frac{\alpha_2''}{\alpha_1'}$, womit wir die 2. Fundamentalform vereinfachen können zu

$$II_{\phi(u,v)} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_2''}{\alpha_1'} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1'(u)}{\alpha_2(u)} \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Gausskrümmung als

$$K = -\frac{\alpha_2''(u)}{\alpha_2(u)}.$$

Aus $K \equiv 1$ folgt also

$$\alpha_2(u) = a \cos u + b \sin u$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Man sieht nun mittels einer Fallunterscheidung leicht, daß es keine solche Kurve mit $\alpha_2(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gibt. Nämlich, wäre $a > 0$, dann wäre zum Beispiel $\alpha_2(\pi) < 0$. Wäre $a < 0$, so ist $\alpha_2(0) < 0$. Wäre $a = 0, b > 0$, dann ist $\alpha_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$ und wäre $a = 0, b < 0$, so ist $\alpha_2\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.

(Würde man auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ definierte Kurven erlauben, hätte man in Abhängigkeit von a, b folgende Lösungen. Weil wir angenommen hatten, daß α nach Bogenlänge parametrisiert ist, folgt $(\alpha_1'(u))^2 = 1 - (\alpha_2'(u))^2 = 1 - (a\cos u + b\sin u)^2$, woraus man

$$\alpha_1(u) = \int_0^u \sqrt{1 - (a\cos u + b\sin u)^2}\,du + \alpha_1(0)$$

erhält.)

<u>Aufgabe 3.</u>

Sei $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ der Einkeitskreis, $\phi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{S}^1$ definiert durch $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ und $Q \subset \mathbb{S}^1$ definiert durch

$$Q := \left\{\phi\left(m\sqrt{2}\right) \mid m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Zeigen Sie: zu jedem $x \in \mathbb{S}^1$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $y \in Q$ mit $d(x, y) < \epsilon$ (bzgl. des Abstandes d im $\mathbb{R}^2$).

Lösung: Zunächst folgt aus der Irrationalität von $\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$, daß alle $\phi\left(m\sqrt{2}\right)$ mit $m \in \mathbb{Z}$ unterschiedlichen Punkten auf dem Kreis entsprechen. Wäre nämlich $\phi\left(m\sqrt{2}\right) = \phi\left(n\sqrt{2}\right)$, so folgt, daß $m\sqrt{2} - n\sqrt{2} = 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, also der Widerspruch $\frac{\sqrt{2}}{2\pi} = \frac{k}{m-n}$.

Wir zeigen zunächst, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ ganze Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 < m\frac{\sqrt{2}}{2\pi} + n < \epsilon$ gibt. Dafür denken wir uns $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ als Kreis $\mathbb{S}^1$ und betrachten die ganzzahligen Vielfachen von $\sqrt{2}$ modulo 2π als Punkte auf diesem Kreis. Wenn $\frac{2\pi}{\epsilon} < l \in \mathbb{Z}$ ist, dann muß es unter den $l+1$ Zahlen $0, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \ldots, l\sqrt{2}$ modulo 1 nach dem Schubfachprinzip zwei Zahlen $m_1\sqrt{2} mod 1$ und $m_2\sqrt{2} mod 1$ mit Abstand $< \frac{2\pi}{l} < \epsilon$ geben. (Wenn die Kreislinie zwischen zwei Punkten Länge kleiner ϵ hat, ist der Abstand der Punkte im $\mathbb{R}^2$ erst recht kleiner als ϵ.)

Sei nun g_1 der ganzzahlige Anteil von $m_1\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$ und g_2 der ganzzahlige Anteil von $m_2\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$. Nach Konstruktion gilt

$$\mid \left(m_1\frac{\sqrt{2}}{2\pi} - g_1\right) - \left(m_2\frac{\sqrt{2}}{2\pi} - g_2\right) \mid < \epsilon.$$

Sei $n := g_2 - g_1 \in \mathbb{Z}$ und $m = m_1 - m_2$. Dann haben wir $\mid m\frac{\sqrt{2}}{2\pi} + n \mid < \epsilon$.

Mit demselben Beweis gibt es auch ganze Zahlen m, n mit $-\epsilon < m\frac{\sqrt{2}}{2\pi} + n < 0$.

Wir zeigen jetzt die Behauptung der Aufgabe. Sei $x \in \mathbb{S}^1$. Wir nehmen an, daß es in einer ϵ-Umgebung von x keinen Punkt der Form $\phi\left(m\sqrt{2}\right)$ gibt. Insbesondere gibt es dann eine maximale Umgebung von x, die keine Punkte aus Q enthält. Seien y und z die Randpunkte dieser maximalen Umgebung. Dann sind entweder y und z selbst in Q, oder es gibt Folgen in Q, die gegen y oder z konvergieren.

Fall 1: der Randpunkt y ist von der Form $y = m_0\frac{\sqrt{2}}{2\pi} + n_0$. Wir wählen δ klein genug, daß $y - \delta > x$. Es gibt dann $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $-\delta < m\frac{\sqrt{2}}{2\pi} < 0$. Es gilt $x < (m_1 - m)\frac{\sqrt{2}}{2\pi} + (n_1 - n) < y$ im Widerspruch zur Konstruktion von y.

Fall 2: der Randpunkt y ist nicht von der Form $y = m_0\frac{\sqrt{2}}{2\pi} + n_0$,es gibt aber eine Folge solcher Punkte, die gegen y konvergiert. Sei $\delta = \mid y - x \mid$. Wir wählen k mit $\frac{1}{k} < \delta$ und finden dann ein y_k mit $\mid y_k - y \mid < \frac{1}{k}$. Es ist $y_k = m_k\frac{\sqrt{2}}{2\pi} + n_k$ mit $m_k, n_k \in \mathbb{Z}$. Zu δ finden wir $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $-\delta < m\frac{\sqrt{2}}{2\pi} + n < 0$. Dann ist aber $x < (m_k - m)\frac{\sqrt{2}}{2\pi} + (n_k - n)$, im Widerspruch zur Konstruktion von y.

<u>Aufgabe 4.</u>

Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ die durch

$$\phi(u,v) = ((\cos u + 2)\cos v, (\cos u + 2)\sin v, \sin u)$$

gegebene Parametrisierung des Torus. Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ die durch

$$\alpha(t) := \phi\left(t, \sqrt{2}t\right)$$

gegebene Kurve auf dem Torus. Zeigen Sie, daß das Bild von α auf dem Torus dicht liegt, d.h. daß es zu jedem $p \in \mathbb{T}^2$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $t \in \mathbb{R}$ mit

$$d(p, \alpha(t)) < \epsilon$$

(bzgl. des Abstandes im $\mathbb{R}^3$) gibt.

Lösung: Das Bild der Kurve α enthält nach Definition alle Punkte der Form $\phi\left(t, t\sqrt{2}\right)$. Wegen

$$\phi\left(t + 2k\pi, (t + 2k\pi)\sqrt{2}\right) = \phi\left(t, (t + 2k\pi)\sqrt{2}\right)$$

für $k \in \mathbb{Z}$ enthält es damit auch alle Punkte der Form $\phi\left(t, (t + 2k\pi)\sqrt{2}\right)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Für ein festes $\phi(t_0, s_0) \in \mathbb{T}^2$ können wir nun den Punkt $\frac{s_0 - t_0\sqrt{2}}{2\pi}$ auf $\mathbb{S}^1$ betrachten und finden nach Aufgabe 3 ein $k \in \mathbb{Z}$, so daß auf $\mathbb{S}^1$

$$\mid \frac{s_0 - t_0\sqrt{2}}{2\pi} - k\sqrt{2} \mid < \epsilon$$

gilt. Also ist $\mid s_0 - (t_0 + 2k\pi)\sqrt{2} \mid < 2\pi\epsilon$, woraus

$$\mid \phi(t_0, s_0) - \phi\left(t_0, (t_0 + 2k\pi)\sqrt{2}\right) \mid = \mid \phi(t_0, s_0) - \phi\left(t_0, t_0\sqrt{2}\right) \mid < 2\pi\epsilon$$

folgt.