Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 1 - Lösungen

Aufgabe 1.

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\alpha(t) = \left(\cos t, t^3 + 3t^2 + 4t + 1, \sin t\right).$$

a) Zeigen Sie, dass das Bild von α auf dem Zylinder $Z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1\right\}$ liegt.
b) Sei $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die durch $p(x,y,z) = (x,z)$ gegebene Projektion auf die $x-z$-Ebene, und sei, für $t \in \mathbb{R}$, $L_t \subset \mathbb{R}^2$ die Gerade durch $(0,0)$ und $p\alpha(t)$. Zeigen Sie: t ist der Winkel zwischen L_t und der x-Achse.

Lösung: a) folgt aus $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, b) folgt aus der Definition des Kosinus und Sinus am Kreis.

Aufgabe 2.

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\alpha(t) = \left(2t, 3t^2, 3t^3\right).$$

a) Zeigen Sie, dass α eine reguläre Kurve ist.
b) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei T_t die Tangente an α in $\alpha(t)$ und L_t die Gerade $L_t := \{\alpha(t) + (s,0,s) \mid s \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass γ_t, der Winkel zwischen T_t und L_t in $\alpha(t)$, unabhängig von t ist.

Lösung: a) gilt, weil die x-Komponente von α' konstant $2 \neq 0$ ist.
b) Es ist $< \alpha'(t), (1,0,1) >=< \left(2, 6t, 9t^2\right), (1,0,1) >= 2 + 9t^2$ und $\| \alpha'(t) \|^2 = 4 + 36t^2 + 81t^4 = \left(2 + 9t^2\right)^2$, woraus $\cos\gamma_t = \frac{2+9t^2}{(2+9t^2)\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, also $\gamma_t = \pm\frac{\pi}{4}$ folgt. Weil der Winkel stetig von t abhängt, muss er also konstant sein.

Aufgabe 3.

Die Traktrix $\alpha : (0,\pi) \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right).$$

a) Skizzieren Sie α und zeigen Sie, dass es in $t \neq \frac{\pi}{2}$ regulär ist.
b) Für $t \in (0,\pi)$ sei L_t die Gerade durch $(0,0)$ und $\alpha(t)$, und γ_t der Winkel zwischen L_t und der y-Achse in $(0,0)$. Zeigen Sie: $\lim_{t\to 0}\gamma_t = \pi, \lim_{t\to\pi}\gamma_t = 0$.

Lösung: a) $\alpha'(t) = \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\right)$. Mit $\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{1}{\sin t}$ folgt
$\alpha'(t) = \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) \neq (0,0)$.
b) Es ist $\cos\gamma_t = \frac{\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)\frac{1}{2}}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 2\cos t\log\tan\frac{t}{2} + \left(\log\tan\frac{t}{2}\right)^2}}$. Für $t \to 0$ oder π sind $\cos t$ und $\sin t$ beschränkt, während $\log\tan\frac{t}{2}$ gegen $\pm\infty$ geht. Daraus erhält man leicht, dass $\cos\gamma_t$ gegen ± 1 geht.

Aufgabe 4.

Sei $\alpha : (0,\pi) \to \mathbb{R}^2$ die Traktrix aus Aufgabe 3. Für $t \in (0,\pi)$ sei T_t die Tangente an α in $\alpha(t)$ und $(0, y_t)$ ihr Schnittpunkt mit der y-Achse. Zeigen Sie, für alle $t \in (0,\pi)$:

$$d\left(\alpha(t), (0,y_t)\right) = 1.$$

Lösung: Es ist $y_t = -\alpha_1 \frac{\dot{\alpha}_2}{\dot{\alpha}_1} + \alpha_2 = -\frac{\sin t}{\cos t}\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) + \cos t + \log\tan\frac{t}{2} = \left(-\cos t + \cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)$. Damit $d^2\left(\alpha\left(t\right), (0, y_t)\right) = \sin^2 t + \left(\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right) - y_t\right)^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$.