Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 9

Aufgabe 1.

Sei $c > 0$ und $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $A(x,y,z) = (cx, cy, cz)$ für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Sei S eine reguläre Fläche mit Gauß-Krümmung $K : S \to \mathbb{R}$ und mittlerer Krümmung $H : S \to \mathbb{R}$.
Sei $\overline{S} := A(S) = \{(cx, cy, cz) : (x,y,z) \in S\}$. Geben Sie eine Parametrisierung von $\overline{S}$ an und berechnen Sie ihre Gauß-Krümmung $\overline{K}$ und mittlere Krümmung $\overline{H}$ in Abhängigkeit von K und H.

Aufgabe 2.

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $\alpha(t) = (t, t^n + 1)$ definierte Kurve
und S_α die Rotationsfläche zu α (Blatt 5, Aufgabe 3).
a) Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve α.
b) Zeigen Sie:
- für $x = 0$ hat S_α in $(x,y,z) \in S_\alpha$ einen Flachpunkt,
- für $x \neq 0$ hat S_α in $(x,y,z) \in S_\alpha$ negative Gauß-Krümmung.

Aufgabe 3.

a) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit $(0,0,0) \in S$ und $z > 0$ für alle $(x,y,z) \in S - \{(0,0,0)\}$.
Zeigen Sie: $K(0,0,0) \geq 0$.
b) Geben Sie eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit Gauß-Krümmung $K \geq 0$ an, für die gilt:
- $(0,0,0) \in S$
- $T_{(0,0,0)}S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\right\}$
- für jede Umgebung $V \subset S$ von $(0,0,0)$ gilt $V \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\right\} \neq \emptyset$ und $V \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\right\} \neq \emptyset$.

Aufgabe 4.

Zeigen Sie, daß es keine kompakte reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit überall negativer Gauß-Krümmung gibt.
(Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.)

Abgabe: Dienstag, 14. Dezember, 10.30 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/dg.html