Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 8

Aufgabe 1.

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $p \in S$ kein Flachpunkt. Zeigen Sie: wenn $H(p) = 0$, dann gibt es zwei asymptotische Richtungen, die in p aufeinander senkrecht stehen.

Aufgabe 2.

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve und β die Reparametrisierung von α nach Bogenlänge. Zu α bzw. β seien S_α bzw. S_β die durch die Parametrisierung $\phi_\alpha(u,v) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u) f(v), \alpha_2(u) g(v))$ bzw. $\phi_\beta(u,v) = (\beta_1(u), \beta_2(u) f(v), \beta_2(u) g(v))$ definierten Flächen, wobei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'f = -g'g$ so gewählt seien, daß diese Parametrisierungen reguläre Flächen definieren. Wir bezeichnen mit $II^\alpha_{(x,y,z)}$ bzw. $II^\beta_{(x,y,z)}$ die zweite Fundamentalform von S_α bzw. S_β in $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie: für $x = \alpha_1(t)$ und

$$II^\alpha_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$$

bzgl. der Basis $\left\{ \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial u}, \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial v} \right\}$ gilt:

$$II^\beta_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \| \alpha'(t) \| e & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.

Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene, $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, und $C \subset S$ eine Kurve mit $T_p S = E$ für alle $p \in C$. Zeigen Sie: alle Punkte $p \in C$ sind entweder parabolisch oder Flachpunkte.

Aufgabe 4. (Pseudosphäre)

Sei $\alpha(t) := \left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2}, \sin t\right), t \in (0, \pi)$ die Traktrix und S_α die zugehörige Rotationsfläche.
a) Zeigen Sie, daß S_α für $x \neq 0$ in $(x,y,z) \in S_\alpha$ regulär ist.
b) Berechnen Sie die zweite Fundamentalform von S_α (in allen regulären Punkten).
c) Zeigen Sie, daß in allen regulären Punkten die Gauß-Krümmung negativ ist.

Abgabe: Dienstag, 7. Dezember, 10.30 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/dg.html