Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 7

Aufgabe 1.

Geben Sie eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ an, so daß 0 ein regulärer Wert und $f^{-1}(0)$ ein Torus ist.

Aufgabe 2.

Zu einer regulären ebenen Kurve $\alpha(t) := (\alpha_1(t), \alpha_2(t)), t \in \mathbb{R}$, mit $\alpha_2(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ für $t_1 \neq t_2$, sei $S_\alpha := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1(t), y^2 + z^2 = \alpha_2(t)^2 \text{ für ein } t \in \mathbb{R}\right\}$ die zugehörige Rotationsfläche.
a) Berechnen Sie die zu der Parametrisierung

$$(u,v) \to (\alpha_1(u), \alpha_2(u)\cos v, \alpha_2(u)\sin v)$$

gehörende erste Fundamentalform.
b) Zeigen Sie: es gibt eine Reparametrisierung mit $F = 0, G = 1$ und E hängt nur von einer Variablen ab.

Aufgabe 3.

a) Sei $\alpha(t) := (\alpha_1(t), \alpha_2(t)), t \in \mathbb{R}$, eine reguläre ebene Kurve mit $\alpha_2(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_2(t)\, dt < \infty$. Sei $S_\alpha := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1(t), y^2 + z^2 = \alpha_2(t)^2 \text{ für ein } t \in \mathbb{R}\right\}$ die zugehörige Rotationsfläche.
Berechnen Sie den Flächeninhalt von S_α.
b) Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte, Kurve mit $k(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Wir definieren die Tube vom Radius 1 um α als die durch die Parametrisierung

$$\phi(u,v) = \alpha(u) + \cos v n(u) + \sin v b(u)$$

gegebene Fläche $T_1(\alpha)$.
Sei α so, daß $T_1(\alpha)$ (mit dieser Parametrisierung) eine reguläre Fläche ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Tube $T_1(\alpha)$ in Abhängigkeit von der Länge von α.

Aufgabe 4.

Unter einer Orientierung einer Fläche verstehen wir eine Überdeckung $S = \cup_{i \in I} V_i$ durch offene Mengen und Parametrisierungen $\phi_i : U_i \to V_i, U_i \subset \mathbb{R}^2$, so daß $\det T\left(\phi_j^{-1}\phi_i\right)$ für alle $i,j \in I$ in jedem Punkt $x \in \phi_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ positiv ist. (Eine Fläche ist also genau dann orientierbar, wenn sie eine Orientierung besitzt.)
Wir sagen, daß zwei Orientierungen $\{(V_i, \phi_i) : i \in I\}$ und $\{(W_k, \psi_k) : k \in K\}$ gleich sind, wenn die Vereinigung $\{(V_i, \phi_i) : i \in I\} \cup \{(W_k, \psi_k) : k \in K\}$ eine Orientierung ist. (Mit anderen Worten: wenn für alle $i \in I, k \in K$ und $x \in \phi_i^{-1}(V_i \cap W_k)$ gilt: $\det T\left(\psi_k^{-1}\phi_i\right) > 0$.)
Zeigen Sie: eine zusammenhängende orientierbare Fläche hat genau zwei verschiedene Orientierungen.

Abgabe: Dienstag, 30. November, 10.30 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/dg.html