Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 6

Aufgabe 1.

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Geben Sie Parametrisierungen für das Ellipsoid

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

an und berechnen Sie die zugehörige erste Fundamentalform.

Aufgabe 2.

Sei S eine reguläre Fläche und $f : S \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.
a) Zeigen Sie, daß es in jedem $p \in S$ einen eindeutigen Vektor $grad\ f(p) \in T_pS \subset \mathbb{R}^3$ gibt, so daß

$$< grad\ f(p), v >_p = Tf_p(v)$$

für *alle* $v \in T_pS$ gilt. (Dieser Vektor heißt der Gradient von f in p.)
Hinweis: Zeigen Sie, daß die durch $\Phi(v)(w) := < w, v >$ für $v, w \in T_pS$ definierte Abbildung $\phi : T_pS \to (T_pS)^*$ ein Isomorphismus ist.
b) Sei $p \in S$. Zeigen Sie:

$$max \{ Tf_p(v) : v \in T_pS, \| v \| = 1 \} = Tf_p\left(\frac{grad\ f(p)}{\| grad\ f(p) \|} \right).$$

("Der Gradient ist die Richtung, in der f am stärksten ansteigt.")

Aufgabe 3.

Sei S eine reguläre Fläche und $f : S \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.
a) Es gelte, daß für alle Nullstellen von f der Gradient von f nicht verschwindet, d.h. für alle $p \in S$ mit $f(p) = 0$ sei $grad\ f(p) \neq 0$.
Zeigen Sie, daß

$$\{ p \in S : f(p) = 0 \}$$

eine reguläre Kurve ist, die in jedem Punkt p senkrecht zu $grad\ f(p)$ ist.
b) Geben Sie ein Beispiel einer regulären Fläche S und einer differenzierbaren nichtkonstanten Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ an, für die $\{ p \in S : f(p) = 0 \}$ keine reguläre Kurve ist.

Aufgabe 4.

Sei $S = U_1 \cup U_2$ eine reguläre Fläche und seien $\phi_i : \mathbb{R}^2 \to U_i, i = 1, 2$, Diffeomorphismen. Wir nehmen an, daß eine Zerlegung des Durchschnittes $U_1 \cap U_2 = V_1 \cup V_2$ existiert, so daß $det\ T\left(\phi_2^{-1}\phi_1\right)$ auf V_1 positiv und auf V_2 negativ ist. Zeigen Sie: S ist nicht orientierbar, d.h. auch für eine beliebige andere Wahl von Parametrisierungen ist es nicht möglich, orientierungs-erhaltende Koordinatenübergänge zu haben.
Hinweis: Zeigen Sie, daß es kein differenzierbares Normalenvektorfeld gibt.

Abgabe: Dienstag, 23. November, 10.30 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/dg.html