Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 5

Aufgabe 1.

Für $r > 0$ sei
$$Z(r) := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r\right\}.$$
a) Zeigen Sie, daß $Z(r)$ eine reguläre Fläche ist.
b) Seien $r_1, r_2 > 0$. Zeigen Sie, daß $Z(r_1)$ und $Z(r_2)$ diffeomorph sind.

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie, daß
$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, z = 0\right\}$$
eine reguläre Fläche ist.
b) Zeigen Sie, daß
$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\right\}$$
keine reguläre Fläche ist.

Aufgabe 3.

Sei $\alpha(t) := (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, $t \in \mathbb{R}$, eine reguläre ebene Kurve $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha_2(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei
$$S_\alpha := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1(t), y^2 + z^2 = \alpha_2(t)^2 \text{ für ein } t \in \mathbb{R}\right\}$$
die zu α gehörende Rotationsfläche. Zeigen Sie, daß S_α eine reguläre Fläche ist.

Aufgabe 4.

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit $(0,0,0) \in S$ und $z > 0$ für alle $(x, y, z) \in S - \{(0,0,0)\}$. Zeigen Sie:
$$T_{(0,0,0)}S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\right\}.$$

Abgabe: Dienstag, 16. November, 10.30 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/dg.html