Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 4

Aufgabe 1.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Scheitelpunkte der Ellipse

$$\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t).$$

Aufgabe 2.

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve und $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ihre Evolute (Blatt 3, Aufgabe 2). Zeigen Sie, daß für alle $t \in \mathbb{R}$ die Tangente an α in $\alpha(t)$ und die Tangente an β in $\beta(t)$ senkrecht aufeinander stehen.
Hinweis: Man kann annehmen, daß α nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Aufgabe 3.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$, $f(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und $f'(0) = 0$. Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die durch $\alpha(t) = (t, f(t))$ gegebene reguläre, ebene Kurve. Zeigen Sie, daß die Krümmung in $t = 0$ wie folgt berechnet werden kann:

$$k(0) = \lim_{t\to 0} \frac{2f(t)}{t^2}.$$

Hinweis: Zeigen Sie $\| f''(0) \| = k(0)$.

Aufgabe 4.

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine durch $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ gegebene reguläre, ebene Kurve. Sei

$$r := \sup\left\{ x(t)^2 + y(t)^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\} < \infty.$$

Zeigen Sie, für $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$x(t_0)^2 + y(t_0)^2 = r \Longrightarrow | k(t_0) | \geq \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Abgabe: Dienstag, 9. November, 10.30 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/∼kuessner/dg.html