Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung, Blatt 3

Für eine **ebene**, nach Bogenlänge parametrisierte, Kurve $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definieren wir die Krümmung durch $k(t) :=\| \alpha''(t) \|$ wenn $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ positiv orientiert ist und $k(t) := - \| \alpha''(t) \|$ sonst. (D.h. wir versehen die für Kurven im $\mathbb{R}^3$ definierte Krümmung noch mit einem Vorzeichen.)

Aufgabe 1.

Für eine reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte, geschlossene Kurve $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(0) = \alpha(l)$ definiert man die Rotationszahl I als

$$I := \frac{1}{2\pi} \int_0^l k(t)\, dt.$$

Berechnen Sie die Rotationszahl für

$$a) \quad \alpha(t) := (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t)),$$

$$b) \quad \alpha(t) := \left\{ \begin{array}{cc} (-1 + \cos(4\pi t), \sin(4\pi t)) & t \leq \frac{1}{2} \\ (1 - \cos(4\pi(t-1)), \sin(4\pi(t-1))) & t \geq \frac{1}{2} \end{array} \right\}.$$

Aufgabe 2.

Es sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve, die $k(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Dann definiert man die **Evolute** $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\beta(t) := \left\{ \begin{array}{ll} \alpha(t) + \frac{1}{k(t)^2}\alpha''(t) & \textit{wenn } \{\alpha'(t), \alpha''(t)\} \textit{ positiv orientiert} \\ \alpha(t) - \frac{1}{k(t)^2}\alpha''(t) & \textit{wenn } \{\alpha'(t), \alpha''(t)\} \textit{ negativ orientiert} \end{array} \right\}.$$

Berechnen Sie die Evolute für
a) den Kreis $\alpha(t) := (\cos t, \sin t)$,
b) die Ellipse $\alpha(t) := (2\cos t, \sin t)$,
c) die logarithmische Spirale $\alpha(t) := (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$.

Aufgabe 3.

Es sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine durch $\alpha(t) := (x(t), y(t))$ gegebene reguläre, **ebene**, nicht notwendig nach Bogenlänge parametrisierte, Kurve. Zeigen Sie, dass sich die Krümmung von α mittels der beiden folgenden Formeln berechnen läßt:

$$k(t) = \frac{< \alpha''(t), J\alpha'(t) >}{\| \alpha'(t) \|^3} = \frac{-y'(t)\, x''(t) + x'(t)\, y''(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Notation: $J(v_1, v_2) := (-v_2, v_1)$.
(J entspricht also der Multiplikation mit i in der komplexen Zahlenebene, d.h. der Drehung um $\frac{\pi}{2}$.)

Aufgabe 4.

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{R}^3$.
a) Zeigen Sie, dass für jede Kurve $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(a) = p, \alpha(b) = q$, und für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, gilt:

$$< q - p, v > = \int_a^b < \alpha'(t), v > dt \leq | v | \int_a^b | \alpha'(t) |\, dt.$$

b) Zeigen Sie, dass $\alpha(t) := \frac{q-p}{b-a} t + \frac{pb-qa}{b-a}$ die Kurve kürzester Länge mit $\alpha(a) = p$ und $\alpha(b) = q$ ist.
(Hinweis: um die Minimalität zu zeigen, wenden Sie a) mit $v = \frac{q-p}{|q-p|}$ an.)

Abgabe: Dienstag, 2. November, 10.30 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/dg.html