Math. Institut der Univ. Siegen, Prof. Dr. U. Koschorke, Dr. T. Kuessner 19. Oktober 2004

Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 2

Aufgabe 1.

Wir betrachten die Vektoren $v_1 := (1, 3, 5)$ und $v_2 := (2, 6, 7)$ im $\mathbb{R}^3$.
Geben Sie jeweils einen Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$ an, für den
a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine positive Basis ist,
b) $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine negative Basis ist.

Aufgabe 2.

Die logarithmische Spirale $\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\alpha(t) := \left(e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t\right).$$

a) Für jedes $t \in (0, \infty]$ sei $r(t) = d(0, \alpha(t))$, und $\phi(t)$ der Winkel zwischen der x-Achse und der Gerade durch $(0, 0)$ und $\alpha(t)$. Zeigen Sie:

$$\lim_{t \to \infty} r(t) = 0$$

und

$$\phi(t) \equiv t \; mod \; 2\pi.$$

b) Zeigen Sie:

$$\int_0^\infty \mid \alpha'(t) \mid dt = \sqrt{2}.$$

Die logarithmische Spirale hat also endliche Länge.

Aufgabe 3.

Seien u, v und w Vektoren im $\mathbb{R}^3$.
Beweisen Sie:

$$(u \times v) \times w = < u, w > v - < v, w > u$$

und

$$(u \times v) \times w - u \times (v \times w) = < u, v > w - < v, w > u.$$

Folgern Sie, dass das Kreuzprodukt nicht assoziativ ist.

Aufgabe 4.

Die Helix $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\alpha(t) := (a \cos t, a \sin t, bt).$$

a) Geben Sie die Parametrisierung der Helix nach Bogenlänge an.
b) Bestimmen Sie das Frenet-3-Bein in jedem Punkt der Helix.
c) Berechnen Sie Krümmung, Torsion und Krümmungsradius in jedem Punkt der Helix.

Abgabe: Dienstag, 26. Oktober, 10.15 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/dg.html