Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 13

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, daß es auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ kein (nichttriviales) Vektorfeld gibt, daß parallel entlang jeder Geodäten (d.h. entlang jedes Großkreises) ist.

Aufgabe 2.

Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ die durch die Parametrisierungen $\phi_1(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \log u)$, $\phi_2(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ gegebenen regulären Flächen. Zeigen Sie, daß $\phi_2^{-1}\phi_1$ keine lokale Isometrie ist, daß aber für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ die Gauß-Krümmung von S_1 in $\phi_1(u,v)$ mit der Gauß-Krümmung von S_2 in $\phi_2(u,v)$ übereinstimmt.

Aufgabe 3.

Sei $\mathbb{H} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$. Wir definieren differenzierbare Abbildungen $E, F, G : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ durch

$$E(x,y) = \frac{1}{y^2}, F(x,y) = 0, G(x,y) = \frac{1}{y^2}.$$

a) Zeigen Sie: das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \frac{1}{2}E_x \\
\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= F_x - \frac{1}{2}E_y \\
\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 G &= \frac{1}{2}E_y \\
\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \frac{1}{2}G_x \\
\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= F_y - \frac{1}{2}G_x \\
\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \frac{1}{2}G_y
\end{aligned}$$

hat die eindeutige Lösung $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 \equiv 0$, $\Gamma_{11}^2(x,y) = \frac{1}{y}$, und $\Gamma_{12}^1(x,y) = \Gamma_{22}^2(x,y) = -\frac{1}{y}$.

b) Berechnen Sie die 'Gauß-Krümmung' $K = \frac{-1}{E}\left\{\left(\Gamma_{12}^2\right)_x - \left(\Gamma_{11}^2\right)_y + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2\right\}$.

Aufgabe 4.

Seien $E, F, G : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 3.
Bestimmen Sie alle Kurven $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, die Lösungen der Geodäten-Gleichung

$$\begin{aligned}
x'' + \Gamma_{11}^1 (x')^2 + 2\Gamma_{12}^1 x'y' + \Gamma_{22}^1 (y')^2 &= 0, \\
y'' + \Gamma_{11}^2 (x')^2 + 2\Gamma_{12}^2 x'y' + \Gamma_{22}^2 (y')^2 &= 0,
\end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen
a) $\gamma(0) = (0,1)$, $\gamma'(0) = (0,1)$
oder
b) $\gamma(0) = (0,1)$, $\gamma'(0) = (1,0)$ sind.

Abgabe: Dienstag, 25. Januar, 10.30 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/dg.html