Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 12

Aufgabe 1.

Sei S eine reguläre Fläche.
a) Zeigen Sie: wenn $f_1 : S \to S$ und $f_2 : S \to S$ Isometrien sind, dann ist auch $f_1 f_2$ eine Isometrie.
b) Zeigen Sie, daß $Isom\,(S)$, die Menge aller Isometrien von S mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung, eine Gruppe ist.

Aufgabe 2.

Sei $\mathbb{R}^2 \lhd O\,(2) := \left\{(A, v) : A \in O\,(2)\,, v \in \mathbb{R}^2\right\}$ mit der Verknüpfung

$$(A_1, v_1)\,(A_2, v_2) := \left(A_1 A_2, A_2^{-1} v_1 + v_2\right).$$

a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^2 \lhd O\,(2)$ eine Gruppe ist.
b) Für $v \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $t_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch $t_v\,(x) := x + v$ für $x \in \mathbb{R}^2$ definierte Abbildung. Zeigen Sie, daß t_v eine Isometrie ist.
c) Für $A \in O\,(2)$ bezeichne $r_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch $r_A\,(x) := Ax$ für $x \in \mathbb{R}^2$ definierte Abbildung. Zeigen Sie, daß r_A eine Isometrie ist.
d) Zeigen Sie, daß die durch

$$\phi\,(A, v) := r_A t_v$$

definierte Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^2 \lhd O\,(2) \to Isom\left(\mathbb{R}^2\right)$$

ein injektiver Homomorphismus ist. Hinweis: Zeigen Sie: $r_A t_v r_{A^{-1}} = t_{Av}$.
(Man kann zeigen, daß ϕ sogar ein Isomorphismus ist.)

Aufgabe 3.

Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine *lineare* Abbildung mit $det\,(A) > 0$.
Zeigen Sie, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind.
(i) A ist konform.
(ii) Es gibt eine orthogonale Abbildung $B \in SO\,(2)$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $A = \lambda B$.
(iii) Es gibt reelle Zahlen a, b mit $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
(iv) Nach der kanonischen Identifizierung $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ entspricht A der Multiplikation mit einer komplexen Zahl z.

Aufgabe 4.

Seien S_1, S_2 reguläre Flächen.
Eine differenzierbare Abbildung $f : S_1 \to S_2$ heißt winkelerhaltend, wenn für alle $p \in S_1, v_1, v_2 \in T_p S_1$ gilt:

$$\angle\,(v_1, v_2) = \angle\,(Tf_p\,(v_1)\,, Tf_p\,(v_2))\,,$$

wobei wir jeweils den Winkel in $[0, \pi]$ betrachten.

Zeigen Sie:
eine (beliebig oft differenzierbare) Abbildung f ist lokal konform genau dann, wenn sie winkelerhaltend ist.

Abgabe: Dienstag, 18. Januar, 10.30 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/dg.html