Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 11

Aufgabe 1.

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ die Pseudosphäre (Blatt 8, Aufgabe 4), $p \in S$. Bestimmen Sie die Dupin-Indikatrix und die asymptotischen Richtungen in p .

Aufgabe 2.

Zeigen Sie, daß es auf dem Torus (Blatt 8, Aufgabe 1) zwei Vektorfelder gibt, die in jedem Punkt linear unabhängig sind.
(Ein Vektorfeld auf $S \subset \mathbb{R}^3$ ist eine differenzierbare Abbildung $v : S \to \mathbb{R}^3$ mit $v(p) \in T_pS$ für alle $p \in S$.)

Aufgabe 3.

Sei S eine reguläre Fläche und $h : S \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.
$p \in S$ heißt kritischer Punkt von h, wenn $T_p h = 0$.
Sei $w \in T_pS$ gegeben. Wir definieren

$$Hess_p h(w) := \frac{d^2(h(\alpha(t)))}{dt^2} |_{t=0},$$

wobei $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ eine differenzierbare Kurve mit

$$\alpha(0) = p, \alpha'(0) = w$$

ist. Zeigen Sie: wenn p ein kritischer Punkt von h ist, dann ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Kurve α.
Hinweis: Wählen Sie eine Parametrisierung $\phi : U \to S$. Dann ist $w = a\phi_u + b\phi_v$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$Hess_p h(a\phi_u + b\phi_v) = a^2 \frac{\partial^2(h\phi)}{\partial u^2}\left(\phi^{-1}(p)\right) + 2ab\frac{\partial^2(h\phi)}{\partial u \partial v}\left(\phi^{-1}(p)\right) + b^2 \frac{\partial^2(h\phi)}{\partial v^2}\left(\phi^{-1}(p)\right).$$

Aufgabe 4.

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$, und $h : S \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(q) := < q - p, N(p) >$$

für $q \in S$, wobei $N(p)$ den Normalenvektor an S in p bezeichnet und $q - p$ sowie das Skalarprodukt jeweils im $\mathbb{R}^3$ zu nehmen sind.
Zeigen Sie:
a) p ist ein kritischer Punkt von h. (Also können wir $Hess_p$ wie in Aufgabe 3 definieren.)
b) Für $w \in T_pS$ ist $Hess_p h(w) = \| w \|^2 k_n(w)$, wobei $k_n(w)$ die Normalkrümmung in Richtung w bezeichnet.
c) Für alle $w \in T_pS$ gilt $Hess_p h(w) = II_p(w)$.

Abgabe: Dienstag, 11. Januar, 10.30 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/dg.html