Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 10

Aufgabe 1.

Sei S eine Minimalfläche ohne Flachpunkte. Zeigen Sie: für alle $p \in S, v, w \in T_pS$ gilt

$$< T_pN(v), T_pN(w) >= -K(p) < v, w > .$$

(Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt Minimalfläche, wenn $H(p) = 0$ für alle $p \in S$ gilt.)

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie alle, nach Bogenlänge parametrisierten, Kurven $\alpha : \mathbb{R} \to \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$, für die die zugehörige Rotationsfläche S_α konstante Gauß-Krümmung $K \equiv 1$ hat.
Hinweis: alle Lösungen der Differentialgleichung $\frac{d^2x}{dt^2}(t) + x(t) = 0$
sind von der Form $x(t) = a \sin t + b \cos t$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3.

Sei $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ der Einkeitskreis, $\phi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{S}^1$ definiert durch $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$, und $Q \subset \mathbb{S}^1$ definiert durch

$$Q := \left\{\phi\left(m\sqrt{2}\right) \mid m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Zeigen Sie: zu jedem $x \in \mathbb{S}^1$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $y \in Q$ mit $d(x, y) < \epsilon$ (bzgl. des Abstandes d im $\mathbb{R}^2$).
(Sie können verwenden, daß $\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$ irrational ist.)

Aufgabe 4.

Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ die durch

$$\phi(u, v) = ((\cos u + 2)\cos v, (\cos u + 2)\sin v, \sin u)$$

gegebene Parametrisierung des Torus. Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ die durch

$$\alpha(t) := \phi\left(t, \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\, t\right)$$

gegebene Kurve auf dem Torus. Zeigen Sie, daß das Bild von α auf dem Torus dicht liegt, d.h. daß es zu jedem $p \in \mathbb{T}^2$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $t \in \mathbb{R}$ mit

$$d(p, \alpha(t)) < \epsilon$$

(bzgl. des Abstandes d im $\mathbb{R}^3$) gibt.
Hinweis: verwenden Sie Aufgabe 3.

Abgabe: Dienstag, 21. Dezember, 10.30 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/dg.html