Übungen zur Differentialgeometrie-Vorlesung

Blatt 1

Aufgabe 1.

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\alpha(t) = \left(\cos t, t^3 + 3t^2 + 4t + 1, \sin t\right).$$

a) Zeigen Sie, dass das Bild von α auf dem Zylinder $Z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1\right\}$ liegt.
b) Sei $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die durch $p(x,y,z) = (x,z)$ gegebene Projektion auf die $x-z$-Ebene, und sei, für $t \in \mathbb{R}$, $L_t \subset \mathbb{R}^2$ die Gerade durch $(0,0)$ und $p\alpha(t)$. Zeigen Sie: t ist der Winkel zwischen L_t und der x-Achse.

Aufgabe 2.

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\alpha(t) = \left(2t, 3t^2, 3t^3\right).$$

a) Zeigen Sie, dass α eine reguläre Kurve ist.
b) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei T_t die Tangente an α in $\alpha(t)$ und L_t die Gerade $L_t := \{\alpha(t) + (s,0,s) \mid s \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass γ_t, der Winkel zwischen T_t und L_t in $\alpha(t)$, unabhängig von t ist.

Aufgabe 3.

Die Traktrix $\alpha : (0,\pi) \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right).$$

a) Skizzieren Sie α und zeigen Sie, dass es in $t \neq \frac{\pi}{2}$ regulär ist.
b) Für $t \in (0,\pi)$ sei L_t die Gerade durch $(0,0)$ und $\alpha(t)$, und γ_t der Winkel zwischen L_t und der y-Achse in $(0,0)$. Zeigen Sie: $\lim_{t\to 0} \gamma_t = \pi, \lim_{t\to\pi} \gamma_t = 0$.

Aufgabe 4.

Sei $\alpha : (0,\pi) \to \mathbb{R}^2$ die Traktrix aus Aufgabe 3. Für $t \in (0,\pi)$ sei T_t die Tangente an α in $\alpha(t)$ und $(0, y_t)$ ihr Schnittpunkt mit der y-Achse. Zeigen Sie, für alle $t \in (0,\pi)$:

$$d\left(\alpha(t), (0, y_t)\right) = 1.$$

Abgabe: Dienstag, 19. Oktober, 10.15 Uhr.
Aufgaben und (nach Abgabeschluß) Lösungsskizzen auf http://www.math.uni-siegen.de/~kuessner/dg.html