

**Gewöhnliche Differentialgleichungen II, WS 2021/22,
Aufgabenblatt 12**

Aufgabe 1 (Staatsexamen Frühjahr 2020, Thema I, Aufgabe 2)

Gegeben sei das autonome Differentialgleichungssystem

$$x' = 2 - xy^2$$

$$y' = (x - 2)y.$$

- Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems.
- Untersuchen Sie alle Ruhelagen auf asymptotische Stabilität.
- Sei $J \subset \mathbb{R}$ das maximale Existenzintervall der eindeutigen Lösung mit Anfangswert $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Begründen Sie, dass $y(t) > 0$ für alle $t \in J$ gilt.

Aufgabe 2:

Mit $\alpha > 0$ betrachten wir die Differentialgleichung des gedämpften Pendels

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = -\alpha x_2 - \sin x_1.$$

- Zeigen Sie, dass die Energie $E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - \cos x_1 + 1$ eine Ljapunow-Funktion ist.
- Welche maximalen Lösungen sind asymptotisch stabil, welche sind instabil?

Abgabe: 6 Februar 2022, 23:59 Uhr