

**Gewöhnliche Differentialgleichungen II, WS 2020/21,
Aufgabenblatt 11**

Aufgabe 1 (Staatsexamen Herbst 2020, Thema II, Aufgabe 1)

Bestimmen Sie alle stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$x' = \sin(y) \cos(y)$$

$$y' = -x$$

und entscheiden Sie, welche Lösungen stabil bzw. instabil sind.

Aufgabe 2 (Staatsexamen Frühjahr 2020, Thema III, Aufgabe 1)

Das Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (\sin(x_2), -\sin(x_1))$ bestimmt die Differentialgleichung $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

- Zeigen Sie: für alle Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}^2$ existiert eine eindeutige Lösung $\phi_{x_0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte (Ruhelagen) in \mathbb{R}^2 .
- Zeigen Sie, dass die Funktion $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $H(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$ eine Erhaltungsgröße (Konstante der Bewegung) ist.
- Welche Gleichgewichtspunkte sind Liapunow-stabil, welche instabil? Benutzen Sie Teil c) zum Nachweis der Liapunow-Stabilität.

Abgabe 26. Januar 2021