Mathematisches Institut
Universität Eichstätt
Dr. Thilo Kuessner 17. Dezember 2021

Gewöhnliche Differentialgleichungen II, WS 2021/22, Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1:

Für ein Differentialgleichungssystem

$$x' = f(x,y)$$

$$y' = g(x,y)$$

sei $F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ und $D_{(x_0,y_0)}F$ die Linearisierung, d.h. das Differential von F in einem Punkt $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:
a) für ein Gradientensystem sind die Eigenwerte von $D_{(x_0,y_0)}F$ reell,
b) für ein Hamiltonsches System sind die Eigenwerte von $D_{(x_0,y_0)}F$ reell oder rein-imaginär (reelle Vielfache von i).

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$x_1' = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) + \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

$$x_2' = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) - \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

a) Zeigen Sie, dass $(1,0)$ ein Gleichgewicht ist.
b) Zeigen Sie, dass es eine Umgebung U von $(1,0)$ gibt, so dass $\lim_{t\to\infty} \|\phi(t,x) - (1,0)\| = 0$ für alle $x \in U$ gilt.
c) Zeigen Sie, dass es zu keinem ϵ mit $0 < \epsilon < 2$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass die Bahn eines Anfangswerts in der δ-Umgebung komplett in der ϵ-Umgebung bleibt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung in Polarkoordinaten die Form $r' = r(1-r^2), \phi' = 2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$ hat. Dafür kann man die Identität $\cos\phi = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$ verwenden.

Abgabe 9. Januar 2022