Mathematisches Institut
Universität Eichstätt
Dr. Thilo Kuessner 10. Dezember 2021

Gewöhnliche Differentialgleichungen II, WS 2021/22, Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1 (Staatsexamen Herbst 2017, Thema I, Aufgabe 3)

Gegeben sei das ebene autonome System

$$x' = x^2y + 3y =: f(x,y)$$

$$y' = -xy^2 - 3x =: g(x,y)$$

Man zeige:
a) Der Nullpunkt ist die einzige Ruhelage des Systems.
b) Das System ist ein Hamiltonsches System; d.h. es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial H}{\partial x} = -g$ und $\frac{\partial H}{\partial y} = f$.
c) H ist konstant auf den Lösungen des Systems; d.h. für jede Lösung ϕ gilt $H \circ \phi = const.$
d) Jede Lösung ϕ ist beschränkt.
e) Jede maximale (d.h. nicht fortsetzbare) Lösung ϕ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 2 (Staatsexamen Herbst 2008, Thema III, Aufgabe 3)

Betrachtet wird das ebene automome System

$$x' = y$$

$$y' = -\sin x$$

um den Gleichgewichtspunkt $(0,0)$.

a) Finden Sie ein stetig differenzierbares $H = H(x,y)$, das auf den Lösungen konstant ist.
Hinweis: Suchen Sie ein H mit $x' = H_y, y' = -H_x$. Warum ist H dann konstant auf den Lösungen?

b) Begründen Sie anschaulich, warum die Lösungskurven $(x(t), y(t))$ in der Nähe von $(0,0)$ geschlossen sind.
Hinweis: Untersuchen Sie H auf Extrema.

Abgabe 17. Dezember 2021, 23:59 Uhr.