Mathematisches Institut
Universität Eichstätt
Dr. Thilo Kuessner 3. Dezember 2021

Gewöhnliche Differentialgleichungen II, WS 2021/22, Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1 (Staatsexamen Herbst 2006, Thema I, Aufgabe 2)

Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$x'' = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, y'' = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

für $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

a) Zeigen Sie, dass für Lösungen des Differentialgleichungssystems die beiden Größen

$$E = \frac{1}{2}((x')^2 + (y')^2) - \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ und } M = xy' - x'y$$

unabhängig von t sind.
Anmerkung: Das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschreibt die Bewegung eines leichten Planeten im Gravitationsfeld eines (unendlich) schweren Sterns. E wird Energie genannt, M Moment. Dass E und M zeitunabhängig sind, bedeutet, dass sie Erhaltungsgrößen des Systems sind.

b) Welche Beziehung muss zwischen E und M erfüllt sein, damit $(x(t), y(t))$ eine Kreisbahn vom Radius $R > 0$ beschreibt?
Hinweis: Benutzen Sie Polarkoordinaten in der (x, y)-Ebene und drücken Sie E und M in diesen Koordinaten aus.

Aufgabe 2 (Staatsexamen Herbst 2008, Thema III, Aufgabe 2)

a) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a > 0$. Sei $H\colon [0,a] \times \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Seien $f_1, \ldots, f_n\colon [0,a] \times \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} f_i = 0$$

in $[0,a] \times \Omega$. Zeigen Sie, dass H auf jeder Lösung $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)\colon [b,c] \to \Omega$ des Differentialgleichungssystems

$$x_k' = f_k(t, x_1, \ldots, x_n), 1 \leq k \leq n,$$

konstant ist $(0 \leq b \leq c \leq a)$.

b)$H, f_1, \ldots, f_n$ mögen den Differenzierbarkeitsvoraussetzungen unter a) genügen. Zu jeder Lösung $\mathbf{x}\colon [b,c] \to \Omega (0 \leq b \leq c \leq a)$ von 2) gebe es eine Konstante $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$ mit

$$H(t, \mathbf{x}(t)) = \alpha, b \leq t \leq c.$$

Zeigen Sie, dass H die Gleichung

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} f_i = 0$$

erfüllt.

Abgabe 10. Dezember 2021, 23:59 Uhr